8 Mais Aplicações de Integração

A Represa Hoover atravessa o Rio Colorado entre Nevada e Arizona. Construída de 1931 a 1936, essa barragem tem 221,4 metros de altura e fornece irrigação, controle de enchentes e geração de energia hidrelétrica. Na Seção 8.3 você aprenderá a estabelecer e resolver uma integral para calcular a força sobre a barragem exercida pela pressão da água.

Pichugin Dmitry/Shutterstock

No Capítulo 6, vimos algumas aplicações de integrais, como áreas, volumes, trabalho e valores médios. Aqui exploraremos algumas das muitas outras aplicações geométricas da integração – o comprimento de uma curva, a área de uma superfície –, assim como quantidades de interesse na física, engenharia, biologia, economia e estatística. Por exemplo, investigaremos o centro de gravidade de uma placa, a força exercida pela pressão da água em uma barragem, a circulação de sangue do coração humano e o tempo médio de espera na linha durante uma chamada telefônica de auxílio ao consumidor.

8.1 Comprimento de Arco

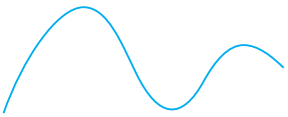


FIGURA 1

O que queremos dizer com o comprimento de uma curva? Podemos pensar em colocar um pedaço de barbante sobre a curva, como na Figura 1, e então medir o comprimento do barbante com uma régua. Mas isso pode ser difícil de fazer com muita precisão se tivermos uma curva complicada. Precisamos de uma definição exata para o comprimento de arco de uma curva, da mesma maneira como desenvolvemos definições para os conceitos de área e volume.

Se a curva é uma poligonal, podemos facilmente encontrar seu comprimento; apenas somamos os comprimentos dos segmentos de reta que formam a poligonal. (Podemos usar a fórmula de distância para encontrar a distância entre as extremidades de cada segmento.) Definiremos o comprimento de uma curva geral primeiro aproximando-a por uma poligonal e, então, tomando o limite quando o número de segmentos da poligonal aumenta. Esse processo é familiar para o caso de um círculo, onde a circunferência é o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos (veja a Figura 2).

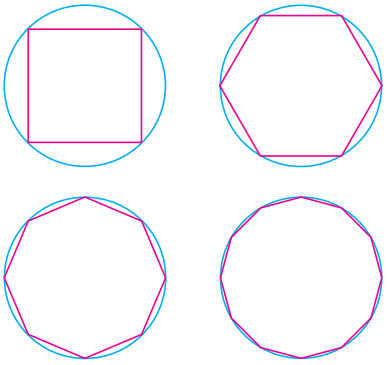


FIGURA 2

Agora, suponha que uma curva C seja definida pela equação $y = f(x)$, onde f é contínua e $a \leqslant x \leqslant b$. Obtemos uma poligonal de aproximação para C dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e com larguras iguais a Δx. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está em C e a poligonal com vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrada na Figura 3, é uma aproximação para C.

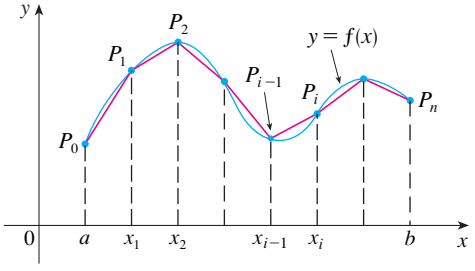


FIGURA 3

O comprimento L de C é aproximadamente o mesmo dessa poligonal e a aproximação fica melhor quando n aumenta. (Veja a Figura 4, onde o arco da curva entre P_{i-1} e P_i foi ampliado e as aproximações com valores sucessivamente menores de Δx são mostradas.) Portanto, definimos o **comprimento** L da curva C com a equação $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$, como o limite dos comprimentos dessas poligonais inscritas (se o limite existir):

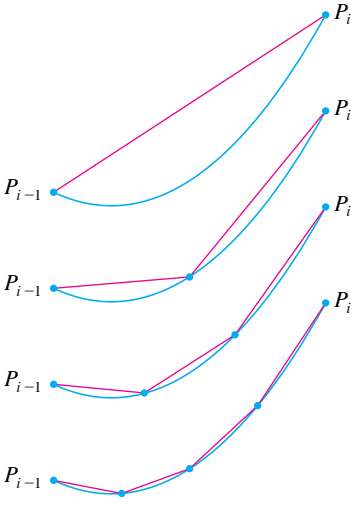


FIGURA 4

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \qquad (1)$$

Observe que o procedimento para a definição de comprimento de arco é muito similar àquele que usamos para definir a área e o volume: dividimos a curva em um número maior de partes pequenas. Então, encontramos os comprimentos aproximados das partes pequenas e os somamos. Finalmente, tomamos o limite quando $n \to \infty$.

A definição de comprimento de arco dada pela Equação 1 não é muito conveniente para propósitos computacionais, mas podemos deduzir uma fórmula integral para L no caso em que f tem uma derivada contínua. [Essa função f é chamada **lisa**, porque uma pequena mudança em x produz uma pequena mudança em $f'(x)$.]

Se tomarmos $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, então

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, descobrimos que existe um número x_i^* entre x_{i-1} e x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

isto é,

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

Então temos

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\,\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \qquad \text{(já que } \Delta x > 0\text{)} \end{aligned}$$

Logo, pela Definição 1,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Reconhecemos essa expressão como igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

pela definição de integral definida. Essa integral existe porque a função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua. Então, demonstramos o seguinte teorema:

2 Fórmula do Comprimento do Arco Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Se usarmos a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever a fórmula do comprimento de arco como da seguinte forma:

3

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

EXEMPLO 1 Calcule o comprimento de arco da parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(4, 8)$. (Veja a Figura 5.)

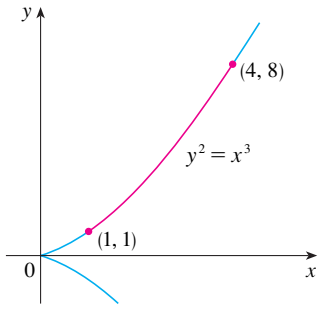


FIGURA 5

SOLUÇÃO Para a porção superior da curva, temos,

$$y = x^{3/2} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

e assim a fórmula do comprimento de arco dá

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Se substituirmos $u = 1 + \frac{9}{4}x$, então $du = \frac{9}{4}\,dx$. Quando $x = 1, u = \frac{13}{4}$; quando $x = 4, u = 10$. Portanto,

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du = \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10} \\ &= \tfrac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right] = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \end{aligned}$$

Como uma verificação de nossa resposta no Exemplo 1, observamos a partir da Figura 5 que o comprimento de arco deve ser um pouco maior que a distância de $(1, 1)$ a $(4, 8)$, que é

$$\sqrt{58} \approx 7{,}615773$$

De acordo com os nossos cálculos no Exemplo 1, temos

$$L = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \approx 7{,}633705$$

Seguramente, isso é um pouco maior que o comprimento do segmento de reta.

Se uma curva tem a equação $x = g(y), c \leq y \leq d$, e $g'(y)$ é contínua, então, pela mudança dos papéis de x na Fórmula 2 ou na Equação 3, obtemos a seguinte fórmula para seu comprimento:

4

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

EXEMPLO 2 Calcule o comprimento de arco da parábola $y^2 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

SOLUÇÃO Como $x = y^2$, temos $dx/dy = 2y$, e a Fórmula 4 nos dá

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

Fazemos a substituição trigonométrica $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$, que resulta em $dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ e $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = \sec\theta$. Por exemplo, quando $y = 0$, $\operatorname{tg}\theta = 0$, logo, $\theta = 0$; quando $y = 1$, $\operatorname{tg}\theta = 2$, assim, $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 2 = \alpha$. Portanto,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\alpha \sec\theta \cdot \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]_0^\alpha \qquad \text{(do Exemplo 8 na Seção 7.2)} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\sec\alpha\ \operatorname{tg}\alpha + \ln|\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha|\right) \end{aligned}$$

(Poderíamos ter usado a Fórmula 21 da Tabela de Integrais.) Uma vez que $\operatorname{tg}\alpha = 2$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 5$, de modo que $\sec\alpha = \sqrt{5}$ e

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$$

A Figura 6 mostra o arco da parábola cujo comprimento é calculado no Exemplo 2, com as aproximações poligonais tendo $n = 1$ e $n = 2$ segmentos de reta, respectivamente. Para $n = 1$, o comprimento aproximado é $L_1 = \sqrt{2}$, a diagonal de um quadrado. A tabela mostra as aproximações L_n que obtemos dividindo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais. Observe que cada vez que duplicamos o número de lados da poligonal, nos aproximamos do comprimento exato, que é

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1{,}478943.$$

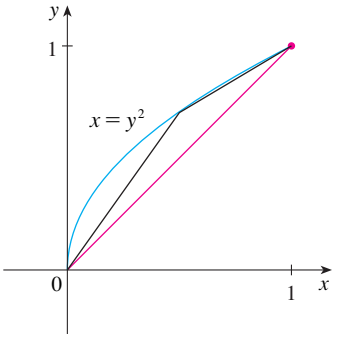


FIGURA 6

n	L_n
1	1,414
2	1,445
4	1,464
8	1,472
16	1,476
32	1,478
64	1,479

Por causa da presença da raiz quadrada nas Fórmulas 2 e 4, os cálculos de comprimento de um arco frequentemente nos levam a integrais muito difíceis ou mesmo impossíveis de calcular explicitamente. Então, algumas vezes temos de nos contentar em achar uma aproximação do comprimento da curva, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3
(a) Escreva uma integral para o comprimento de arco da hipérbole $xy = 1$ do ponto $(1, 1)$ ao ponto $(2, \frac{1}{2})$.
(b) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento de arco.

SOLUÇÃO
(a) Temos

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

e assim o comprimento de arco é

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx$$

(b) Usando a Regra de Simpson (veja a Seção 7.7) com $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ e $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$, obtemos

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \\ &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)] \\ &\approx 1{,}1321. \end{aligned}$$

Verificando o valor da integral definida com uma aproximação mais exata, produzida por um sistema de computação algébrica, vemos que a aproximação usando a Regra de Simpson é precisa até quatro casas decimais.

Função Comprimento de Arco

É útil termos uma função que meça o comprimento de arco de uma curva a partir de um ponto inicial particular até outro ponto qualquer na curva. Deste modo, se a curva lisa C tem a equação $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, seja $s(x)$ a distância ao longo de C do ponto inicial $P_0(a, f(a))$ ao ponto $Q(x, f(x))$. Então, s é uma função, chamada **função comprimento de arco** e, pela Fórmula 2,

$$\boxed{5} \qquad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

(Substituímos a variável da integração por t para que x não tenha dois significados.) Podemos usar a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para derivar a Equação 5 (uma vez que o integrando é contínuo):

$$\boxed{6} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

A Equação 6 mostra que a taxa de variação de s em relação a x é sempre pelo menos 1 e é igual a 1 quando $f'(x)$, a inclinação da curva, é 0. A diferencial do comprimento de arco é

$$\boxed{7} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

e essa equação é escrita algumas vezes na forma simétrica

$$\boxed{8} \qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

A interpretação geométrica da Equação 8 é mostrada na Figura 7. Ela pode ser utilizada como um dispositivo mnemônico para lembrar as Fórmulas 3 e 4. Se escrevermos $L = \int ds$, então a partir da Equação 8 podemos resolver para obter 7, o que resulta em 3, ou podemos resolver para obter

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

o que nos fornece 4.

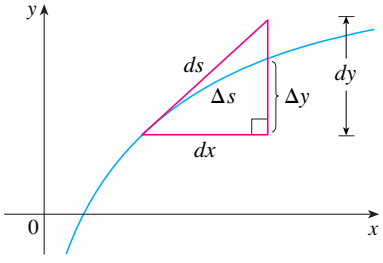


FIGURA 7

EXEMPLO 4 Encontre a função comprimento de arco para a curva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ tomando $P_0(1, 1)$ como o ponto inicial.

SOLUÇÃO Se $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, então

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Assim, a função comprimento de arco é dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8}\ln x - 1$$

Por exemplo, o comprimento de arco ao longo da curva de $(1, 1)$ a $(3, f(3))$ é

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8{,}1373$$

A Figura 8 mostra a interpretação da função comprimento de arco no Exemplo 4. A Figura 9 mostra o gráfico desta função comprimento de arco. Por que $s(x)$ é negativo quando x é menor que 1?

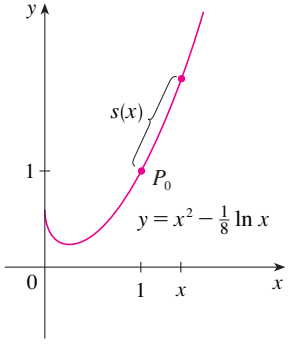


FIGURA 8

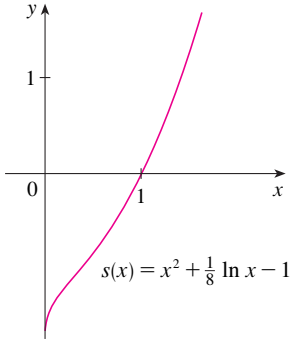


FIGURA 9

8.1 Exercícios

1. Use a fórmula do comprimento de arco 3 para encontrar o comprimento da curva $y = 2x - 5, -1 \leqslant x \leqslant 3$. Verifique o seu resultado observando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

2. Use a fórmula do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = \sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Verifique sua resposta observando que a curva é parte de um círculo.

3–6 Escreva uma integral para o comprimento da curva. Use sua calculadora para encontrar o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais.

3. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

4. $y = xe^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

5. $x = \sqrt{y} - y, \quad 1 \leqslant y \leqslant 4$

6. $x = y^2 - 2y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$

7–18 Encontre o comprimento exato da curva.

7. $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

8. $y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad y > 0$

9. $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

10. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

11. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3), \quad 1 \leqslant y \leqslant 9$

12. $y = \ln(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

13. $y = \ln(\sec x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

14. $y = 3 + \frac{1}{2}\cosh 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

16. $y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x})$

17. $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

18. $y = 1 - e^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

19–20 Encontre o comprimento de arco da curva do ponto P ao ponto Q.

19. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad P(-1, \frac{1}{2}), \quad Q(1, \frac{1}{2})$

20. $x^2 = (y - 4)^3, \quad P(1, 5), \quad Q(8, 8)$

21–22 Trace a curva e estime visualmente seu comprimento. Use sua calculadora para encontrar o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais.

21. $y = x^2 + x^3, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

22. $y = x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

23–26 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento de arco da curva. Compare a sua resposta com o valor da integral produzido pela sua calculadora.

23. $y = x \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

24. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

25. $y = \ln(1 - x^3), \quad 0 \leqslant x \leqslant 5$

26. $y = e^{-x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

27. (a) Trace a curva $y = x\sqrt[3]{4 - x}, \ 0 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Calcule os comprimentos das poligonais inscritas com $n = 1$, 2 e 4 lados. (Divida o intervalo em subintervalos iguais.) Ilustre esboçando esses polígonos (como na Figura 6).

(c) Escreva uma integral para o comprimento da curva.

(d) Use sua calculadora para encontrar o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. Compare com as aproximações na parte (b).

28. Repita o Exercício 27 para a curva

$$y = x + \operatorname{sen} x \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

29. Use um sistema de computação algébrica ou uma tabela de integrais para achar o comprimento de arco *exato* da curva $y = \ln x$ que está entre os pontos $(1, 0)$ e $(2, \ln 2)$.

30. Use um sistema de computação algébrica ou uma tabela de integrais para achar o comprimento de arco *exato* da curva $y = x^{4/3}$ que está entre os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Se seu SCA tiver problemas para calcular a integral, faça uma substituição que mude a integral em uma que o SCA possa calcular.

31. Esboce a curva com a equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ e use a simetria para achar seu comprimento.

32. (a) Esboce a curva $y^3 = x^2$.

(b) Use as Fórmulas 3 e 4 para escrever duas integrais para o comprimento de arco de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Observe que uma delas é uma integral imprópria e calcule ambas as integrais.

(c) Ache o comprimento de arco dessa curva de $(-1, 1)$ a $(8, 4)$.

33. Encontre a função comprimento de arco para a curva $y = 2x^{3/2}$ com ponto inicial $P_0(1, 2)$.

34. (a) Encontre a função comprimento de arco para a curva $y = \ln(\operatorname{sen} x), 0 < x < \pi$, com o ponto inicial $(\pi/2, 0)$.

(b) Trace a curva e faça o gráfico de sua função comprimento de arco na mesma tela.

35. Encontre a função comprimento de arco para a curva $y = \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$ com ponto inicial $(0, 1)$.

36. Um vento contínuo sopra uma pipa para oeste. A altura da pipa acima do solo a partir da posição horizontal $x = 0$ até $x = 25$ é dada por $y = 50 - 0{,}1(x - 15)^2$. Ache a distância percorrida pela pipa.

37. Um falcão voando a 15 m/s a uma altitude de 180 m acidentalmente derruba sua presa. A trajetória parabólica de sua presa caindo é descrita pela equação

$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

até que ela atinja o solo, onde y é a altura acima do solo e x, a distância horizontal percorrida em metros. Calcule a distância percorrida pela presa do momento em que ela é derrubada até o momento em que ela atinge o solo. Expresse sua resposta com precisão de um décimo de metro.

38. O Gateway Arch, em St. Louis, foi construído usando a equação

$$y = 211{,}49 - 20{,}96 \cosh 0{,}03291765x$$

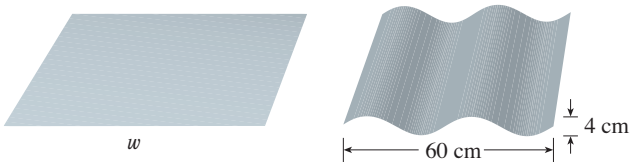
É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

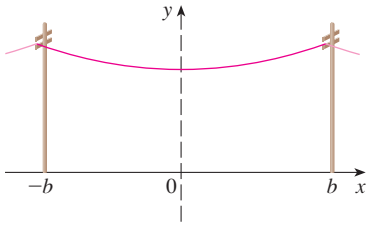
para a curva central do arco, em que x e y são medidos em metros e $|x| \leq 91{,}20$. Escreva uma integral para o comprimento de arco e use sua calculadora para estimar o comprimento com precisão de 1 metro.

39. Um fabricante de telhados metálicos corrugados quer produzir painéis que tenham 60 cm de largura e 4 cm de espessura processando folhas planas de metal como mostrado na figura. O perfil do telhado tem o formato de uma onda senoidal. Verifique que a senoide tem a equação $y = 2 \operatorname{sen}(\pi x/15)$ e calcule a largura w de uma folha metálica plana que é necessária para fazer um painel de 60 cm. (Use sua calculadora para calcular a integral correta até quatro algarismos significativos.)



40. (a) A figura mostra um fio de telefone pendurado entre dois postes em $x = -b$ e $x = b$. Ele tem o formato de uma catenária com a equação $y = c + a \cosh(x/a)$. Calcule o comprimento do fio.

(b) Suponha que dois postes telefônicos estejam separados por 20 m e que o comprimento do fio entre os postes seja de 20,4 m. Se o ponto mais baixo do fio deve estar 9 m acima do chão, a qual altura o fio deve ser preso em cada poste?



41. Encontre o comprimento da curva

$$y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt \qquad 1 \leq x \leq 4$$

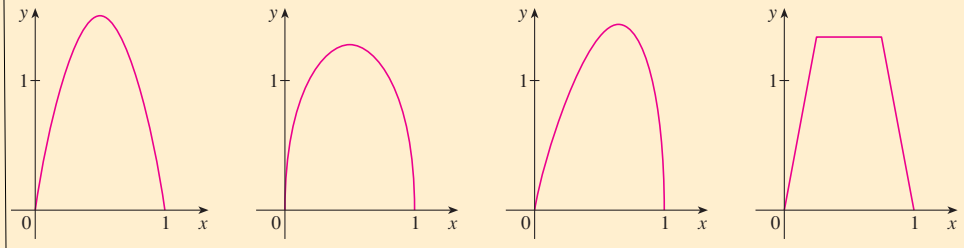
42. As curvas com as equações $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, são chamadas **círculos gordos**. Desenhe as curvas com $n = 2, 4, 6, 8$ e 10 para ver o porquê. Escreva uma integral para o comprimento L_{2k} do círculo gordo com $n = 2k$. Sem tentar calcular essa integral, determine o valor de $\lim_{k \to \infty} L_{2k}$.

PROJETO DE DESCOBERTA TORNEIO DE COMPRIMENTO DE ARCOS

As curvas mostradas a seguir são exemplos de funções f contínuas e que têm as seguintes propriedades.

1. $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$.
2. $f(x) \geqslant 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.
3. A área sob o gráfico de f de 0 a 1 é igual a 1.

Os comprimentos L dessas curvas, no entanto, são diferentes.



$L \approx 3{,}249$ $L \approx 2{,}919$ $L \approx 3{,}152$ $L \approx 3{,}213$

Tente descobrir as fórmulas de duas funções que satisfaçam as condições 1, 2 e 3. (Seus gráficos podem ser similares aos mostrados ou podem ser totalmente diferentes.) Em seguida, calcule o comprimento de arco de cada gráfico. O vencedor será aquele que obtiver o menor comprimento.

8.2 Área de uma Superfície de Revolução

Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada em torno de uma reta. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução do tipo discutido nas Seções 6.2 e 6.3.

Queremos definir a área da superfície de revolução de maneira que ela corresponda à nossa intuição. Se a área da superfície for A, podemos pensar que para pintar a superfície seria necessária a mesma quantidade de tinta que para pintar uma região plana com área A.

Vamos começar com algumas superfícies simples. A área da superfície lateral de um cilindro circular com raio r e altura h é tomada como $A = 2\pi rh$, porque podemos nos imaginar cortando o cilindro e desenrolando-o (como na Figura 1) para obter um retângulo com as dimensões $2\pi r$ e h.

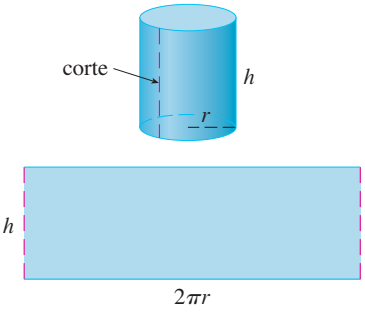


FIGURA 1

Da mesma maneira, podemos tomar um cone circular com a base de raio r e a geratriz l, cortá-lo ao longo da linha pontilhada na Figura 2 e planificá-lo para formar o setor de um círculo com raio l e ângulo central $\theta = 2\pi r/l$.

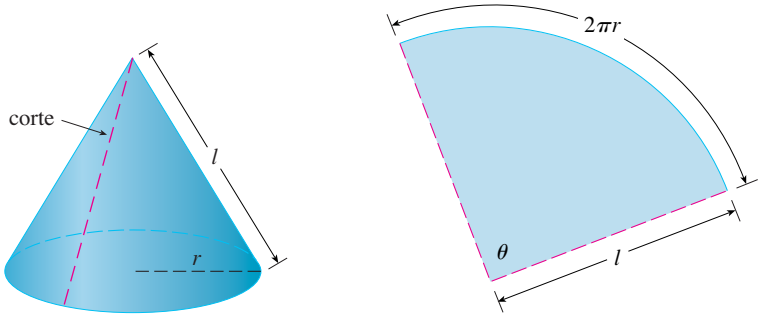


FIGURA 2

Sabemos que, em geral, a área do setor de um círculo com raio l e ângulo θ é $\frac{1}{2}l^2\theta$ (veja o Exercício 35 na Seção 7.3); e assim, neste caso, a área é

$$A = \tfrac{1}{2}l^2\theta = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi rl$$

Portanto, definimos a área da superfície lateral de um cone como $A = \pi rl$.

E nas superfícies de revolução mais complicadas? Se seguirmos a estratégia que usamos com o comprimento de arco, poderemos aproximar a curva original por um polígono. Quando esse polígono é girado ao redor de um eixo, ele cria uma superfície mais simples, cuja área da superfície se aproxima da área da superfície real. Tomando o limite, podemos determinar a área exata da superfície.

A superfície aproximadora, então, consiste em diversas *faixas*, cada qual formada pela rotação de um segmento de reta ao redor de um eixo. Para encontrar a área da superfície, cada uma dessas faixas pode ser considerada uma parte de um cone circular, como mostrado na Figura 3. A área da faixa (ou tronco de um cone) mostrada na Figura 3, com geratriz l e raios superior e inferior r_1 e r_2, respectivamente, é calculada pela subtração das áreas dos dois cones:

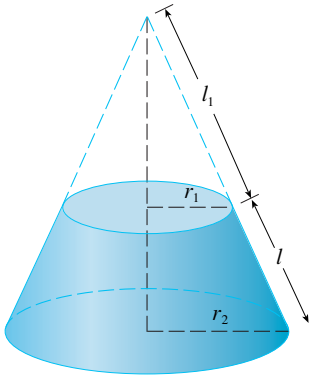


FIGURA 3

$$\boxed{1} \qquad A = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Pela semelhança de triângulos, temos

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$$

o que fornece

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \qquad \text{ou} \qquad (r_2 - r_1) l_1 = r_1 l$$

Colocando isso na Equação 1, obtemos

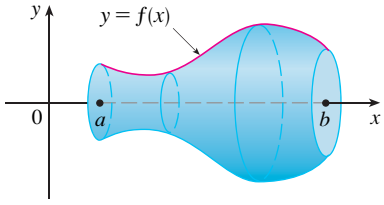
$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

ou

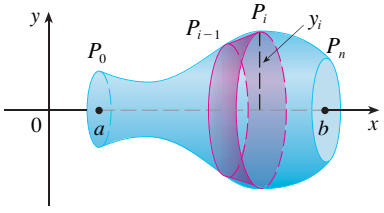
$$\boxed{2} \qquad \boxed{A = 2\pi r l}$$

em que $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ é o raio médio da faixa.

Agora, aplicamos essa fórmula à nossa estratégia. Considere a superfície mostrada na Figura 4, obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, ao redor do eixo x, em que f é positiva e tem derivada contínua. Para definirmos sua área de superfície, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com as extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e largura igual a Δx, como fizemos para determinar o comprimento de arco. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre a curva. A parte da superfície entre x_{i-1} e x_i é aproximada ao tomar o segmento da reta $P_{i-1}P_i$ e girá-lo em torno do eixo x. O resultado é uma faixa com geratriz $l = |P_{i-1}P_i|$ e raio médio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$; logo, pela Fórmula 2, sua área de superfície é



(a) Superfície de revolução



(b) Faixa de aproximação

FIGURA 4

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|$$

Como na demonstração do Teorema 8.1.2, temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

onde x_i^* é algum número em $[x_{i-1}, x_i]$. Quando Δx é pequeno, temos $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ e também $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$, uma vez que f é contínua. Portanto,

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

e, então, uma aproximação para o que pensamos ser a área da superfície de revolução completa é

$$\boxed{3} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

Essa aproximação se torna melhor quando $n \to \infty$ e, reconhecendo $\boxed{3}$ como uma soma de Riemann para a função $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Portanto, no caso onde f é positiva e tem derivada contínua, definimos a **área da superfície** obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x como

$$\boxed{4} \qquad \boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Com a notação de Leibniz para as derivadas, essa fórmula se torna

5
$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Se a curva é descrita como $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, então a fórmula para a área da superfície torna-se

6
$$S = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

e as Fórmulas 5 e 6 podem ser resumidas simbolicamente usando a notação para o comprimento de arco dado na Seção 8.1 como

7
$$S = \int 2\pi y\, ds$$

Para a rotação em torno do eixo y, a fórmula da área da superfície se torna

8
$$S = \int 2\pi x\, ds$$

onde, como anteriormente, podemos usar

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{ou} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Essas fórmulas podem ser lembradas pensando-se em $2\pi y$ ou $2\pi x$ como a circunferência de um círculo traçada pelo ponto (x, y) na curva e girada em torno do eixo x ou eixo y, respectivamente (veja a Figura 5).

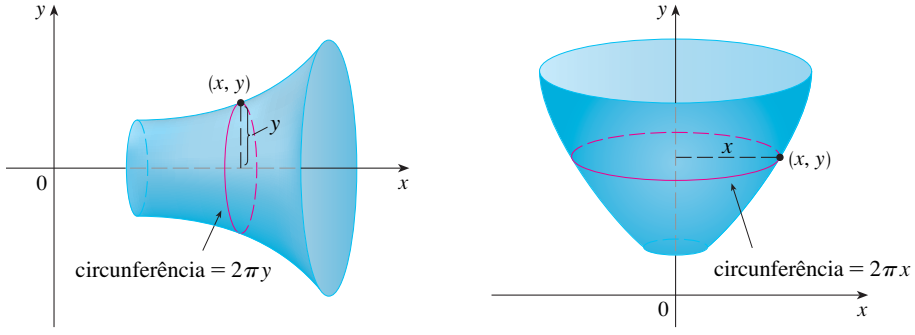


FIGURA 5 (a) Rotação em torno do eixo x: $S = \int 2\pi y\, ds$ (b) Rotação em torno do eixo y: $S = \int 2\pi x\, ds$

EXEMPLO 1 A curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, é um arco do círculo $x^2 + y^2 = 4$. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x. (A superfície é uma porção de uma esfera do raio 2. Veja a Figura 6.)

SOLUÇÃO Temos

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

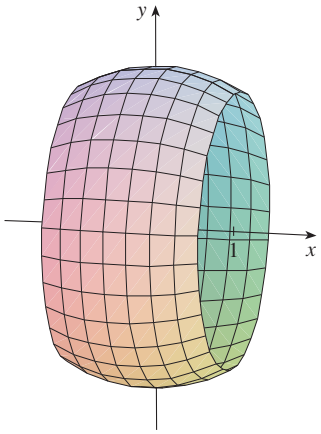


FIGURA 6

A Figura 6 mostra a porção da esfera cuja área é calculada no Exemplo 1.

A Figura 7 mostra a superfície de revolução cuja área é calculada no Exemplo 2.

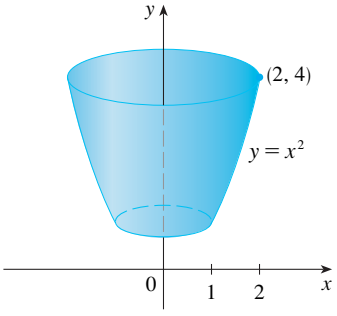


FIGURA 7

Para verificar nossa resposta no Exemplo 2, veja pela Figura 7 que a área da superfície deve ser próxima à de um cilindro circular com a mesma altura e raio na metade entre o raio superior e o inferior da superfície: $2\pi(1{,}5)(3) \approx 28{,}27$. Calculamos que a área da superfície era

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \approx 30{,}85,$$

o que parece razoável. Alternativamente, a área da superfície deve ser ligeiramente maior que a área do tronco de um cone com as mesmas bordas superior e inferior. Da Equação 2, isso é $2\pi(1{,}5)\left(\sqrt{10}\right) \approx 29{,}80$.

e assim, pela Fórmula 5, a área da superfície é

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi(2) = 8\pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 O arco da parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ a $(2, 4)$ é girado em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

SOLUÇÃO 1 Usando

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

temos, da Fórmula 8,

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi x\, ds \\ &= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \end{aligned}$$

Substituindo $u = 1 + 4x^2$, temos $du = 8x\, dx$. Lembrando-nos de mudar os limites de integração, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_5^{17} \\ &= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 2 Usando

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

temos

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\, \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\, dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du \qquad (\text{onde } u = 1 + 4y) \\ &= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \qquad (\text{como na solução 1}) \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, em torno do eixo x.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 5 com

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

temos

Outro método: Use a Fórmula 6 com $x = \ln y$.

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad (\text{onde } u = e^x)$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta \qquad (\text{onde } u = \operatorname{tg}\theta \text{ e } \alpha = \operatorname{tg}^{-1} e)$$

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta \operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad (\text{pelo exemplo 8 na seção 7.2})$$

$$= \pi\left[\sec\alpha \operatorname{tg}\alpha + \ln(\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

Como $\operatorname{tg}\alpha = e$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + e^2$ e

Ou use a Fórmula 21, na Tabela de Integrais.

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

8.2 Exercícios

1–4

(a) Escreva uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do (i) eixo x e (ii) eixo y.

(b) Use o recurso de integração numérica de sua calculadora para calcular as áreas da superfície com precisão de quatro casas decimais.

1. $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

2. $y = x^{-2}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

3. $y = e^{-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

3. $x = \ln(2y + 1)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

5–12 Calcule a área exata da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x.

5. $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

6. $9x = y^2 + 18$, $2 \leqslant x \leqslant 6$

7. $y = \sqrt{1 + 4x}$, $1 \leqslant x \leqslant 5$

8. $y = \sqrt{1 + e^x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

9. $y = \operatorname{sen} \pi x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, $\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

11. $x = \tfrac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

12. $x = 1 + 2y^2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

13–16 A curva dada é girada em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

13. $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

14. $y = 1 - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant a/2$

16. $y = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}\ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

17–20 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x. Compare a sua resposta com o valor da integral fonecido pela sua calculadora.

17. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$

18. $y = x + \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

19. $y = xe^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

20. $y = x \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

SCA **21–22** Use um SCA ou uma tabela de integrais para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

21. $y = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

22. $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$

SCA **23–24** Use um SCA para encontrar a área exata da superfície obtida girando a curva em torno do eixo y. Se seu SCA apresentar problemas para calcular a integral, expresse a área da superfície como uma integral na outra variável.

23. $y = x^3$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

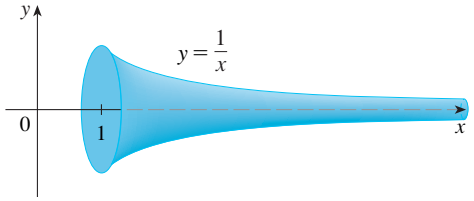
24. $y = \ln(x + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

25. Se a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ é girada em torno do eixo x, o volume do sólido resultante é finito (veja o Exercício 63 na Seção 7.8). Mostre que a área da superfície é infinita.

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(A superfície é mostrada na figura e é conhecida como **trombeta de Gabriel**.)



26. Se a curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, é girada em torno do eixo x, calcule a área da superfície resultante.

27. (a) Se $a > 0$, encontre a área da superfície gerada pela rotação da curva $3ay^2 = x(a - x)^2$ em torno do eixo x.

(b) Encontre a área da superfície se a rotação for em torno do eixo y.

28. Um grupo de engenheiros está construindo uma antena parabólica cujo formato será formado pela rotação da curva $y = ax^2$ em torno do eixo y. Se a antena tiver 10 pés de diâmetro e uma profundidade máxima de 2 pés, encontre o valor de a e a área de superfície da antena.

29. (a) A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

é girada em torno do eixo x para formar uma superfície chamada *elipsoide ou esferoide prolato*. Encontre a área da superfície deste elipsoide.

(b) Se a elipse da parte (a) for girada em torno de seu eixo menor (o eixo y), o elipsoide resultante é chamado um *esferoide oblato*. Encontre a área da superfície deste elipsoide.

30. Encontre a área da superfície do toro no Exercício 61 na Seção 6.2.

31. Se a curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, gira em torno da reta horizontal $y = c$, onde $f(x) \leqslant c$, encontre a fórmula para a área da superfície resultante.

SCA **32.** Use o resultado do Exercício 31 para escrever uma integral para encontrar a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, em torno da reta $y = 4$. Então, use um SCA para calcular a integral.

33. Calcule a área da superfície obtida pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em torno da reta $y = r$.

34. (a) Mostre que a área da superfície de uma zona de uma esfera que está entre dois planos paralelos é $S = 2\pi Rh$, onde R é o raio da esfera e h, a distância entre os planos. (Observe que S depende apenas da distância entre os planos e não de sua localização, desde que ambos os planos interceptem a esfera.)

(b) Mostre que a área de superfície de uma zona de um *cilindro* com raio R e altura h é a mesma que a área de superfície da zona de uma *esfera* no item (a).

35. A Fórmula 4 é válida apenas quando $f(x) \geqslant 0$. Mostre que quando $f(x)$ não é necessariamente positiva, a fórmula para a área da superfície torna-se

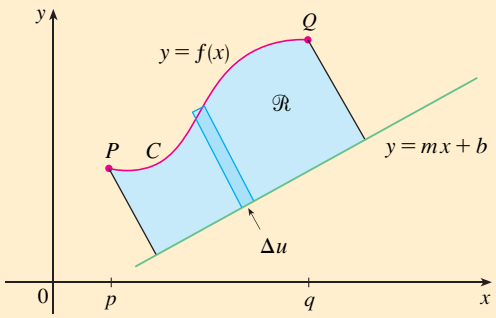
$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

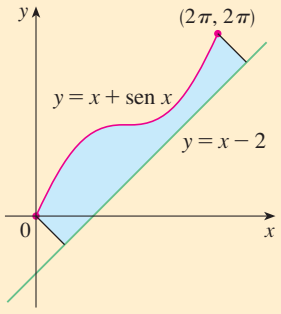
36. Seja L o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, onde f é positiva e tem derivada contínua. Seja S_f a área da superfície gerada pela rotação da curva em torno do eixo x. Se c é uma constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ e seja S_g a área da superfície correspondente gerada pela curva $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Expresse S_g em termos de S_f e L.

PROJETO DE DESCOBERTA ROTAÇÃO EM TORNO DE UMA RETA INCLINADA

Sabemos como encontrar o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região em torno de uma reta horizontal ou vertical (veja a Seção 6.2). Também sabemos calcular a área de uma superfície de revolução se girarmos uma curva em torno de uma reta horizontal ou vertical (veja a Seção 8.2). Mas, e se girarmos em torno de uma reta inclinada, isto é, uma reta que não é nem horizontal nem vertical? Neste projeto pedimos que você descubra as fórmulas para o volume de um sólido de revolução e para a área da superfície de revolução quando o eixo de rotação é uma reta inclinada.

Seja C o arco da curva $y = f(x)$ entre os pontos $P(p, f(p))$ e $Q(q, f(q))$ e seja $\mathcal{R}$ a região delimitada por C, pela reta $y = mx + b$ (que está inteiramente abaixo de C) e pelas perpendiculares à reta a partir de P e de Q.

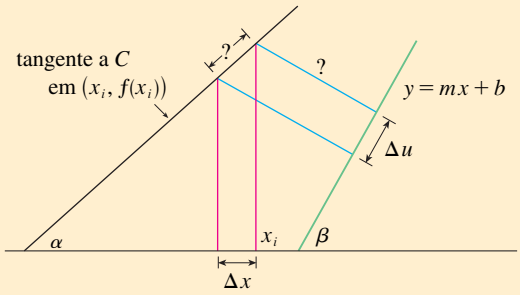




1. Mostre que a área de $\mathcal{R}$ é

$$\frac{1}{1+m^2}\int_p^q [f(x) - mx - b][1 + mf'(x)]\,dx.$$

[*Dica:* Essa fórmula pode ser verificada pela subtração das áreas, mas será útil durante o projeto deduzi-la primeiro aproximando a área usando retângulos perpendiculares à reta, como mostrado na figura. Use a figura para ajudar a expressar Δu em termos de Δx.]



2. Encontre a área da região mostrada na figura à esquerda.
3. Ache uma fórmula (similar àquela no Problema 1) para o volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = mx + b$.
4. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do Problema 2 ao redor da reta $y = x - 2$.
5. Encontre a fórmula para a área da superfície obtida pela rotação de C ao redor da reta $y = mx + b$.

SCA 6. Use um sistema de computação algébrica para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, em torno da reta $y = \frac{1}{2}x$. Então, aproxime seu resultado para três casas decimais.

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

8.3 Aplicações à Física e à Engenharia

Dentre as muitas aplicações de cálculo integral à física e à engenharia, consideramos duas aqui: a força em função da pressão da água e os centros de massa. Como em nossas aplicações anteriores à geometria (áreas, volumes e comprimentos) e ao trabalho, nossa estratégia é fragmentar a quantidade física em um grande número de pequenas partes, aproximar cada pequena parte, somar os resultados, tomar o limite e, então, calcular a integral resultante.

Pressão e Força Hidrostática

Os mergulhadores observam que a pressão da água aumenta quando eles mergulham mais fundo. Isso ocorre por causa do aumento do peso da água sobre eles.

Em geral, suponha que uma placa horizontal fina com área de A metros quadrados seja submersa em um fluido de densidade ρ quilogramas por metro cúbico a uma profundidade d metros abaixo da superfície do fluido, como na Figura 1. O fluido diretamente acima da placa tem um volume $V = Ad$, assim sua massa é $m = \rho V = \rho Ad$. A força exercida pelo fluido na placa é, portanto:

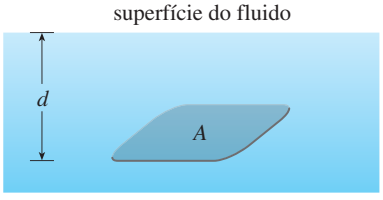


FIGURA 1

$$F = mg = \rho gAd$$

em que g é a aceleração devido à gravidade. A **pressão** P na placa é definida como a força por unidade de área:

$$P = \frac{F}{A} = \rho gd$$

Quando usamos o sistema de unidades norte-americano, escrevemos $P = \rho g d = \delta d$, em que $\delta = \rho g$ é a densidade de peso (em oposição a ρ, que é a densidade de massa). Por exemplo a densidade de peso da água é $\delta = 62{,}5$ lb/pé^3.

No Sistema Internacional de Unidades, a pressão é medida em newtons por metro quadrado, que é chamada pascal (abreviação: 1 N/m^2 = 1 Pa). Como essa é uma unidade pequena, o kilopascal (kPa) é frequentemente usado. Por exemplo, uma vez que a densidade da água é de $\rho = 1\,000$ kg/m^3, a pressão no fundo de uma piscina de 2 m de profundidade é

$$P = \rho g d = 1\,000 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m}$$

$$= 19\,600 \text{ Pa} = 19{,}6 \text{ kPa}$$

Um princípio importante da pressão de fluidos é o fato verificado experimentalmente de que *em qualquer ponto no líquido a pressão é a mesma em todas as direções*. (Um mergulhador sente a mesma pressão no nariz e em ambas as orelhas.) Assim, a pressão em *qualquer* direção em uma profundidade d em um fluido com densidade de massa ρ é dada por

$$\boxed{1} \qquad P = \rho g d = \delta d$$

Isso nos ajuda a determinar a força hidrostática contra uma placa *vertical*, parede ou barragem em um fluido. Este não é um problema simples, porque a pressão não é constante, mas aumenta com o aumento da profundidade.

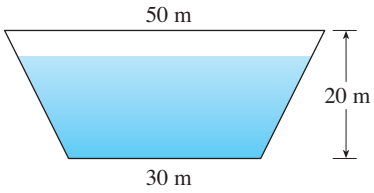


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Uma barragem tem o formato do trapézio mostrado na Figura 2. A altura é de 20 m e a largura é de 50 m no topo e 30 m no fundo. Calcule a força na barragem decorrente da pressão hidrostática da água, se o nível de água está a 4 m do topo da barragem.

SOLUÇÃO Escolhemos um eixo vertical x com origem na superfície da água, como na Figura 3(a). A profundidade da água é de 16 m; assim, dividimos o intervalo $[0, 16]$ em subintervalos de igual comprimento com extremidades x_i e escolhemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. A i-ésima faixa horizontal da represa é aproximada por um retângulo com altura Δx e largura w_i, na qual, pela semelhança de triângulos na Figura 3(b),

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

e, assim, $$w_i = 2(15 + a) = 2\left(15 + 8 - \tfrac{1}{2}x_i^*\right) = 46 - x_i^*$$

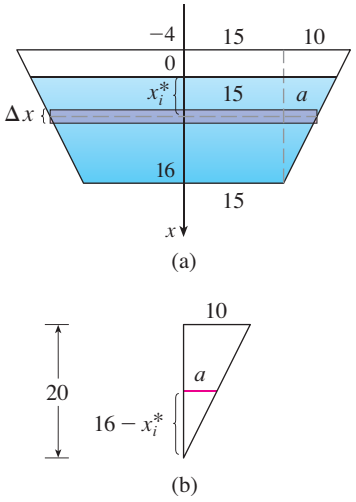


FIGURA 3

Se A_i é a área da i-ésima faixa, então

$$A_i \approx w_i \, \Delta x = (46 - x_i^*) \, \Delta x$$

Se Δx é pequeno, então a pressão P_i na i-ésima faixa é praticamente constante, e podemos usar a Equação 1 para escrever

$$P_i \approx 1\,000 g x_i^*$$

A força hidrostática F_i agindo na i-ésima faixa é o produto da pressão pela área:

$$F_i = P_i A_i \approx 1\,000 g x_i^* (46 - x_i^*) \, \Delta x$$

Somando essas forças e tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos a força hidrostática total na barragem:

$$F = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1\,000 g x_i^* (46 - x_i^*) \, \Delta x$$

$$= \int_0^{16} 1\,000 g x (46 - x) \, dx$$

$$= 1\,000(9{,}8) \int_0^{16} (46x - x^2) \, dx$$

$$= 9\,800 \left[23x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{16}$$

$$\approx 4{,}43 \times 10^7 \text{ N}$$

EXEMPLO 2 Calcule a força hidrostática no extremo de um tambor cilíndrico com raio de 3 pés que está submerso em água com 10 pés de profundidade.

SOLUÇÃO Neste exemplo é conveniente escolher os eixos como na Figura 4, de modo que a origem seja colocada no centro do tambor. Então, o círculo tem uma equação simples, $x^2 + y^2 = 9$. Como no Exemplo 1, dividimos a região circular em faixas horizontais de larguras iguais. Da equação do círculo, vemos que o comprimento da i-ésima faixa é $2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}$ e assim sua área é

$$A_i = 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

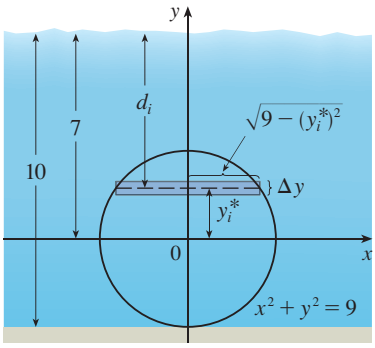


FIGURA 4

A pressão nessa faixa é aproximadamente

$$\delta d_i = 62{,}5(7 - y_i^*)$$

e assim a força na faixa é aproximadamente

$$\delta d_i A_i = 62{,}5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

A força total é obtida pela soma das forças em todas as faixas e tomando-se o limite:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62{,}5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y \\ &= 125 \int_{-3}^{3} (7 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy \\ &= 125 \cdot 7 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy - 125 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\,dy \end{aligned}$$

A segunda integral é 0, porque o integrando é uma função ímpar (veja o Teorema 5.5.7). A primeira integral pode ser calculada usando a substituição trigonométrica $y = 3 \operatorname{sen}\theta$, mas é mais fácil observar que essa é a área de um disco semicircular com raio 3. Então

$$\begin{aligned} F &= 875 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy = 875 \cdot \tfrac{1}{2}\pi(3)^2 \\ &= \frac{7\,875\pi}{2} \approx 12\,370 \text{ lb} \end{aligned}$$

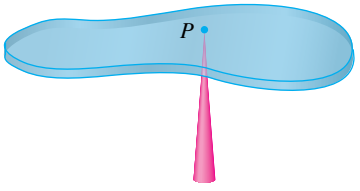


FIGURA 5

Momentos e Centros de Massa

Nosso principal objetivo aqui é encontrar o ponto P no qual uma fina placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente, como na Figura 5. Esse ponto é chamado **centro de massa** (ou centro de gravidade) da placa.

Primeiro, consideramos a situação mais simples mostrada na Figura 6, onde duas massas m_1 e m_2 são presas a um bastão de massa desprezível em lados opostos a um apoio e a distâncias d_1 e d_2 do apoio. O bastão ficará em equilíbrio se

$$\boxed{2} \qquad m_1 d_1 = m_2 d_2$$

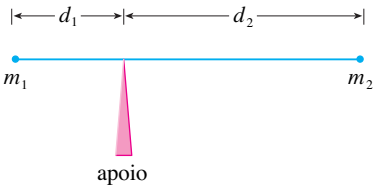


FIGURA 6

Esse é um fato experimental descoberto por Arquimedes e chamado Lei da Alavanca. (Pense em uma pessoa mais leve equilibrando outra pessoa mais pesada em uma gangorra sentando-se mais longe do centro.)

Agora suponha que o bastão esteja ao longo do eixo x com m_1 em x_1 e m_2 em x_2 e o centro da massa em $\bar{x}$. Se compararmos as Figuras 6 e 7, vemos que $d_1 = \bar{x} - x_1$ e $d_2 = x_2 - \bar{x}$ e, portanto, a Equação 2 nos dá

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \boxed{3}$$

Os números $m_1 x_1$ e $m_2 x_2$ são denominados **momentos** das massas m_1 e m_2 (em relação à origem) e a Equação 3 diz que o centro de massa $\bar{x}$ é obtido somando-se os momentos das massas e dividindo pela massa total $m = m_1 + m_2$.

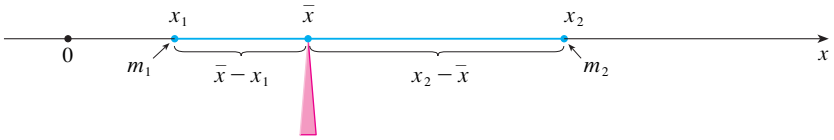


FIGURA 7

Em geral, se tivermos um sistema de n partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre o eixo x, podemos mostrar analogamente que o centro de massa do sistema está localizado em

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \quad \boxed{4}$$

onde $m = \Sigma\, m_i$ é a massa total do sistema, e a soma dos momentos individuais

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

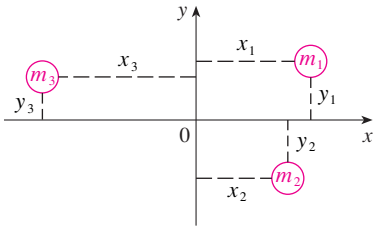


FIGURA 8

é chamada **momento do sistema em relação à origem**. Então, a Equação 4 pode ser reescrita como $m\bar{x} = M$, que diz que, se a massa total fosse considerada como concentrada no centro de massa $\bar{x}$, então seu momento deveria ser o mesmo que o momento do sistema.

Agora, considere um sistema de n partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ no plano xy como mostrado na Figura 8. Por analogia com o caso unidimensional, definimos o **momento do sistema com relação ao eixo *y*** como

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \boxed{5}$$

e o **momento do sistema com relação ao eixo *x*** como

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \boxed{6}$$

Então, M_y mede a tendência de o sistema girar em torno do eixo y e M_x mede a tendência de ele girar em torno do eixo x.

Como no caso unidimensional, as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa são dadas em termos dos momentos pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad \boxed{7}$$

onde $m = \Sigma\, m_i$ é a massa total. Como $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$, o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ é o ponto em que uma partícula única de massa m teria os mesmos momentos do sistema.

EXEMPLO 3 Calcule os momentos e os centros de massa do sistema de objetos que têm massas 3, 4 e 8 nos pontos $(-1, 1)$, $(2, -1)$ e $(3, 2)$, respectivamente.

SOLUÇÃO Usamos as Equações 5 e 6 para calcular os momentos

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

Como $m = 3 + 4 + 8 = 15$, usamos as Equações 7 para obter

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Então, o centro de massa é $\left(1\frac{14}{15}, 1\right)$. (Veja a Figura 9.)

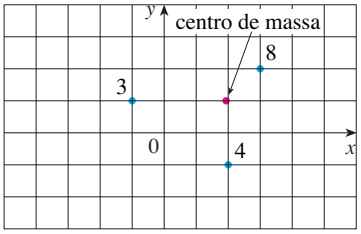
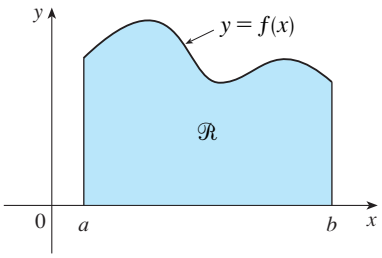


FIGURA 9

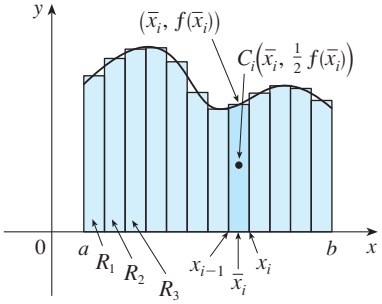
A seguir, consideramos uma placa plana (denominada *lâmina*) com densidade uniforme ρ que ocupa uma região $\mathcal{R}$ do plano. Desejamos encontrar o centro de massa da placa, chamado **centroide** (ou centro geométrico) de $\mathcal{R}$. Ao fazermos isso, usamos os seguintes princípios físicos: o **princípio da simetria** diz que se $\mathcal{R}$ é simétrica em relação à reta l, então o centroide de $\mathcal{R}$ encontra-se em l. (Se $\mathcal{R}$ é refletida em torno de l, então $\mathcal{R}$ continua a mesma, logo, seu centroide permanece fixo. Mas os únicos pontos fixos estão em l.) Logo, o centroide de um retângulo é seu centro. Os momentos devem ser definidos de maneira que, se a massa total da região está concentrada no centro de massa, então seus momentos permanecem inalterados. Além disso, o momento da união de duas regiões sem intersecção deve ser a soma dos momentos das regiões individuais.

Suponha que a região $\mathcal{R}$ seja do tipo mostrado na Figura 10(a); isto é, $\mathcal{R}$ esteja entre as retas $x = a$ e $x = b$, acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, onde f é uma função contínua. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e larguras iguais a Δx. Escolhemos o ponto amostral x_i^* como o ponto médio $\bar{x}_i$ do i-ésimo *subintervalo*, que é $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Isso determina a aproximação poligonal de $\mathcal{R}$, mostrada na Figura 10(b). O centroide do i-ésimo retângulo aproximador R_i é seu centro $C_i\left(\bar{x}_i, \frac{1}{2}f(\bar{x}_i)\right)$. Sua área é $f(\bar{x}_i)\,\Delta x$; assim, sua massa é

$$\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$



(a)



(b)

FIGURA 10

O momento de R_i em relação ao eixo y é o produto de sua massa pela distância de C_i ao eixo y, que é $\bar{x}_i$. Logo,

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Somando esses momentos, obtemos o momento da aproximação poligonal de $\mathcal{R}$ e, então, tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos o momento da própria região $\mathcal{R}$ em relação ao eixo y:

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx$$

De maneira análoga, calculamos o momento de R_i em relação ao eixo x como o produto de sua massa e da distância de C_i ao eixo x:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\tfrac{1}{2}f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

Novamente somamos esses momentos e tomamos o limite para obter o momento de $\mathcal{R}$ em relação ao eixo x:

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

Como no caso do sistema de partículas, o centro de massa da placa é definido de maneira que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. Mas a massa da placa é o produto de sua densidade por sua área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx$$

e assim

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{r\int_a^b xf(x)\,dx}{r\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\rho\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Observe o cancelamento dos ρ's. A posição do centro de massa independe da densidade.

Em resumo, o centro de massa da placa (ou o centroide de $\mathcal{R}$) está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

8

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

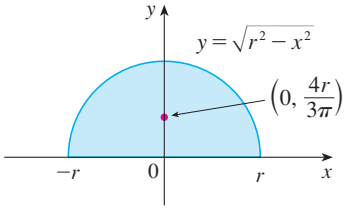


FIGURA 11

EXEXEMPLO 4 Calcule o centro de massa de uma placa semicircular de raio r.

SOLUÇÃO Para usarmos 8, colocamos o semicírculo como na Figura 11, de modo que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $a = -r$, $b = r$. Aqui não há a necessidade de usar a fórmula para calcular $\bar{x}$ porque, pelo princípio da simetria, o centro de massa deve estar sobre o eixo y, e, dessa forma, $\bar{x} = 0$. A área do semicírculo é $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, e assim

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi r^2} \cdot \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}
\end{aligned}$$

O centro de massa está localizado no ponto $(0, 4r/(3\pi))$.

EXEXEMPLO 5 Encontre o centroide da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

SOLUÇÃO A área da região é

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

assim, a Fórmula 8 dá

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} xf(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx \\
&= x\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{(pela integração pelas partes)} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

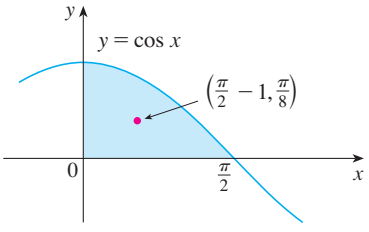


FIGURA 12

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left[x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

O centroide é $\left(\tfrac{1}{2}\pi - 1, \tfrac{1}{8}\pi\right)$ e está mostrado na Figura 12.

Se a região $\mathcal{R}$ está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geqslant g(x)$, como mostrado na Figura 13, então o mesmo tipo de argumento que nos levou à Fórmula 8 pode ser usado para mostrar que o centroide $\mathcal{R}$ é $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

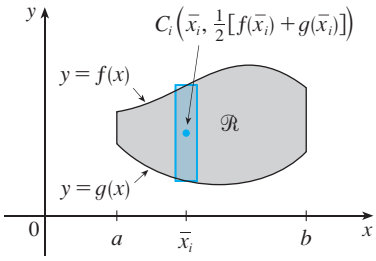


FIGURA 13

9

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

(Veja o Exercício 47.)

EXEMPLO 6 Encontre o centroide da região delimitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO A região é esboçada na Figura 14. Tomamos $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$ e $b = 1$ na Fórmula 9. Primeiro observamos que a área da região é

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

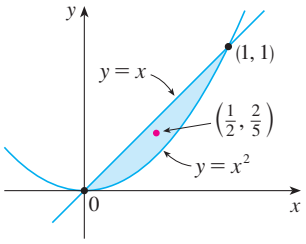


FIGURA 14

Portanto

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x[f(x) - g(x)]\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 x(x - x^2)\,dx$$

$$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

O centroide é $\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{5}\right)$.

Terminaremos esta seção mostrando uma conexão surpreendente entre centroides e volumes de revolução.

Teorema de Pappus Seja $\mathcal{R}$ uma região plana que está inteiramente de um lado de uma reta l em um plano. Se $\mathcal{R}$ é girada em torno de l, então o volume do sólido resultante é o produto da área A de $\mathcal{R}$ pela distância d percorrida pelo centroide de $\mathcal{R}$.

Este teorema tem o nome do matemático grego Pappus de Alexandria, que viveu no século IV d.C.

DEMONSTRAÇÃO Demonstraremos o caso especial no qual a região está entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ como na Figura 13 e a reta l é o eixo y. Usando o método das cascas cilíndricas (veja a Seção 6.3), temos

$$V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= 2\pi(\bar{x}A) \qquad \text{(pela Fórmula 9)}$$

$$= (2\pi\bar{x})A = Ad$$

onde $d = 2\pi\bar{x}$ é a distância percorrida pelo centroide durante uma rotação em torno do eixo y.

EXEMPLO 7 Um toro é formado pela rotação de um círculo de raio r em torno de uma reta no plano do círculo que está a uma distância R $(> r)$ do centro do círculo. Calcule o volume do toro.

SOLUÇÃO O círculo tem a área $A = \pi r^2$. Pelo princípio de simetria, seu centroide é seu centro e, assim, a distância percorrida pelo centroide durante a rotação é $d = 2\pi R$. Portanto, pelo Teorema de Pappus, o volume do toro é

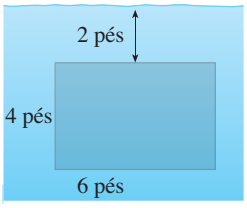
$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$

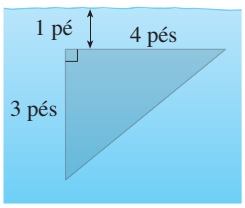
O método do Exemplo 7 deve ser comparado com o do Exercício 61 na Seção 6.2.

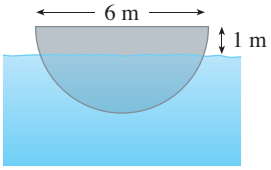
8.3 Exercícios

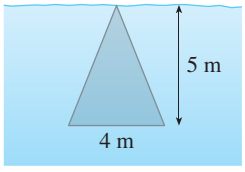
1. Um aquário de 5 pés de comprimento, 2 pés de largura e 3 pés de profundidade está cheio de água. Descubra (a) a pressão hidrostática no fundo do aquário, (b) a força hidrostática no fundo e (c) a força hidrostática em uma extremidade do aquário.
2. Um tanque tem 8 m de comprimento, 4 m de largura, 2 m de altura e contém querosene com densidade 820 kg/m^3 para uma profundidade de 1,5 m. Descubra (a) a pressão hidrostática no fundo do tanque, (b) a força hidrostática no fundo e (c) a força hidrostática em uma extremidade do tanque.

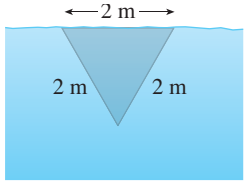
3–11 Uma placa vertical é imersa (ou parcialmente imersa) na água e tem a forma indicada nas figuras a seguir. Explique como aproximar a força hidrostática em um lado da placa usando uma soma de Riemann. Então expresse a força como uma integral e calcule-a.

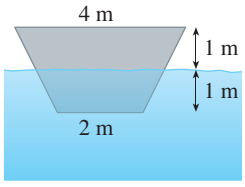
3.


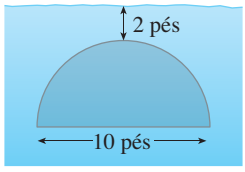
4.


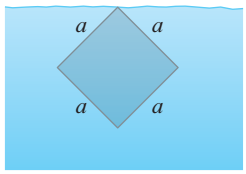
5.


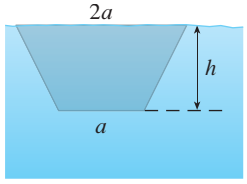
6.


7.


8.


9.


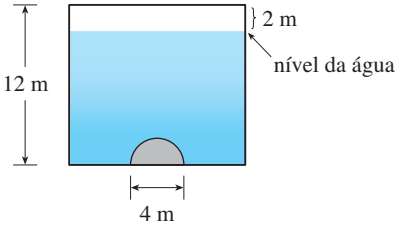
10.


11.


12. Um caminhão transporta leite com uma densidade de 64,6 lb/pé^3 em um tanque cilíndrico com 6 pés de diâmetro.
   (a) Encontre a força exercida pelo leite em uma extremidade do tanque quando o tanque está cheio.
   (b) E se o tanque estiver pela metade?

13. Uma vala é preenchida com um líquido de densidade 840 kg/m^3. As extremidades da vala são triângulos equiláteros com lados de 8 m de comprimento e o vértice no fundo. Calcule a força hidrostática em uma extremidade da vala.

14. Uma barragem vertical tem um portão semicircular, como mostrado na figura. Calcule a força hidrostática contra o portão.



15. Um cubo com lados de 20 cm de comprimento está no fundo de um aquário no qual a água atinge 1m de profundidade. Calcule a força hidrostática (a) no topo do cubo e (b) em um dos lados do cubo.

16. Uma barragem está inclinada a um ângulo de 30° da vertical e tem o formato de um trapézio isósceles de 100 pés de largura no topo e 50 pés no fundo e um lado inclinado de 70 pés. Calcule a força hidrostática na barragem quando ela estiver cheia de água.

17. Uma piscina tem 10 m de largura, 20 m de comprimento e seu fundo é um plano inclinado. O extremo mais raso tem uma profundidade de 1 m e o extremo mais fundo, 3 m. Se a piscina estiver cheia de água, calcule a força hidrostática (a) na extremidade mais rasa, (b) na extremidade mais funda, (c) em um dos lados e (d) no fundo da piscina.

18. Suponha que uma placa esteja imersa verticalmente em um fluido com densidade ρ e que a largura da placa seja $w(x)$ a uma profundidade de x metros abaixo do nível da superfície do fluido. Se o topo da placa está a uma profundidade a e o fundo, a uma profundidade b, mostre que a força hidrostática sobre um lado da placa é

$$F = \int_a^b \rho g x\, w(x)\, dx$$

19. Uma placa de metal foi encontrada verticalmente imersa em água do mar, que tem uma densidade de 64 lb/pé^3. As medidas da largura da placa foram tiradas nas profundidades indicadas. Use a Regra de Simpson para estimar a força da água contra a placa.

Profundidade (m)	7,0	7,4	7,8	8,2	8,6	9,0	9,4
Largura da placa (m)	1,2	1,8	2,9	3,8	3,6	4,2	4,4

20. (a) Use a fórmula do Exercício 18 para mostrar que

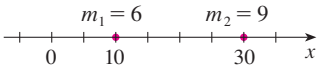
$$F = (\rho g \bar{x})A$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada x do centroide da placa e A é a sua área. Essa equação mostra que a força hidrostática contra uma região plana vertical seria a mesma se a região fosse horizontal e estivesse na mesma profundidade do centroide da região.

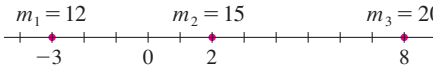
(b) Use o resultado da parte (a) para dar outra solução para o Exercício 10.

21–22 As massas pontuais m_i estão localizadas no eixo x conforme mostra a figura a seguir. Ache o momento M do sistema com relação à origem e o centro de massa $\bar{x}$.

21.



22.



23–24 As massas m_i estão localizadas nos pontos P_i. Encontre os momentos M_x e M_y e o centro de massa do sistema.

23. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 10;$
$P_1(1, 5),\ P_2(3, -2),\ P_3(-2, -1)$

24. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 1,\ m_4 = 4;$
$P_1(1, -2),\ P_2(3, 4),\ P_3(-3, -7),\ P_4(6, -1)$

25–28 Esboce a região delimitada pelas curvas e visualmente estime a localização do centroide. Em seguida, calcule as coordenadas exatas do centroide.

25. $y = 2x,\quad y = 0,\quad x = 1$

26. $y = \sqrt{x},\quad y = 0,\quad x = 4$

27. $y = e^x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

28. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = 0,\quad 0 \leq x \leq \pi$

29–33 Calcule o centroide da região delimitada pelas curvas dadas.

29. $y = x^2,\quad x = y^2$

30. $y = 2 - x^2,\quad y = x$

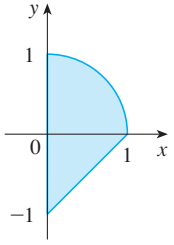
31. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = \cos x,\quad x = 0,\quad x = \pi/4$

32. $y = x^3,\quad x + y = 2,\quad y = 0$

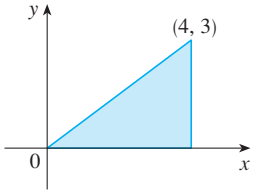
33. $x + y = 2,\quad x = y^2$

34–35 Calcule os momentos M_x e M_y e o centro de massa de uma lâmina com a densidade e o formato dados:

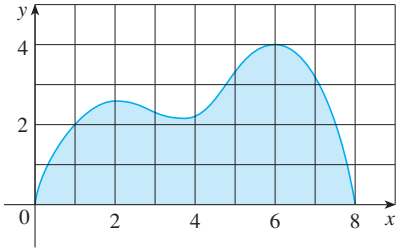
34. $\rho = 3$



35. $\rho = 10$



36. Utilize a de Regra Simpson para calcular o centroide da região dada.



37. Encontre o centroide da região delimitada pelas curvas $y = x^2 - x$ e $y = x^2 - 1$. Esboce a região e marque o centroide para ver se sua resposta é razoável.

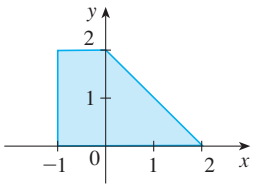
38. Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas no eixo x dos pontos de intersecção das curvas $y = e^x$ e $y = 2 - x^2$.

Então, encontre (aproximadamente) o centroide da região delimitada por essas curvas.

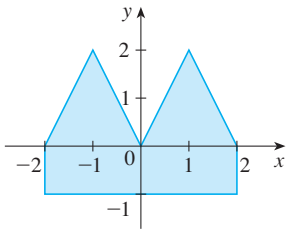
39. Demonstre que o centroide de qualquer triângulo está localizado no ponto de intersecção das medianas. [*Dicas:* Posicione os eixos de modo que os vértices sejam $(a, 0)$, $(0, b)$ e $(c, 0)$. Lembre-se de que uma mediana é um segmento de reta ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto. Lembre-se também de que as medianas se interceptam em um ponto a dois terços da distância de cada vértice (ao longo da mediana) ao lado oposto.]

40-41 Encontre o centroide da região mostrada, não por integração, mas por localização dos centroides dos retângulos e triângulos (do Exercício 39) e usando a aditividade dos momentos.

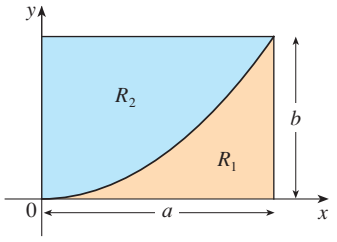
40.



41.



42. Um retângulo R com lados a e b foi dividido em duas partes R_1 e R_2 por um arco de parábola que tem seu vértice em um dos cantos de R e passa pelo canto oposto. Encontre os centroides de ambas as regiões R_1 e R_2.



43. Se $\bar{x}$ é a coordenada x do centroide da região que fica sob o gráfico de uma função contínua f, onde $a \leqslant x \leqslant b$, mostre que

$$\int_a^b (cx + d) f(x)\, dx = (c\bar{x} + d) \int_a^b f(x)\, dx$$

44-46 Use o Teorema de Pappus para encontrar o volume do sólido dado.

44. Uma esfera de raio r (use o Exemplo 4).

45. Um cone com altura h e raio da base r.

46. O sólido obtido pela rotação do triângulo com vértices $(2, 3)$, $(2, 5)$ e $(5, 4)$ ao redor do eixo x.

47. Demonstre a Fórmula 9.

48. Seja $\mathcal{R}$ a região que está entre as curvas $y = x^m$ e $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, onde m e n são inteiros com $0 \leqslant n < m$.

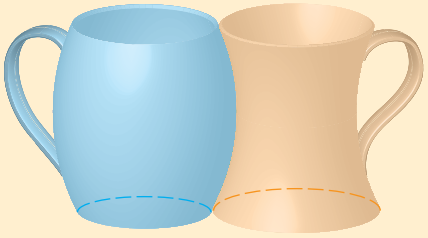
(a) Esboce a região $\mathcal{R}$.

(b) Encontre as coordenadas do centroide de $\mathcal{R}$.

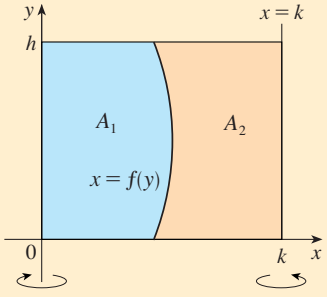
(c) Tente encontrar valores de m e n tais que o centroide esteja *fora* de $\mathcal{R}$.

PROJETO DE DESCOBERTA XÍCARAS DE CAFÉ COMPLEMENTARES

Suponha que você possa escolher entre duas xícaras de café, do tipo mostrado, uma que se curva para fora e outra para dentro. Observando que elas têm a mesma altura e suas formas se encaixam perfeitamente, você se pergunta em qual xícara cabe mais café. É claro que você poderia encher uma xícara com água e derramá-la dentro da outra, mas, sendo um estudante de cálculo, você se decide por uma abordagem mais matemática. Ignorando as alças, você observa que ambas as xícaras são superfícies de revolução, de modo que você pode pensar no café como um volume de revolução.



Xícara A Xícara B



1. Suponha que as xícaras tenham altura h, que a xícara A seja formada girando a curva $x = f(y)$ em torno do eixo y e que a xícara B seja formada girando a mesma curva em torno da reta $x = k$. Encontre o valor de k tal que caiba a mesma quantidade de café nas duas xícaras.

2. O que o seu resultado do Problema 1 diz sobre as áreas A_1 e A_2 mostradas na figura?

3. Use o Teorema de Pappus para explicar seus resultados nos Problemas 1 e 2.

4. Com base em suas próprias medidas e observações, sugira um valor para h e uma equação para $x = f(y)$ e calcule a quantidade de café que cabe em cada xícara.

8.4 Aplicações à Economia e à Biologia

Nesta seção consideraremos algumas aplicações de integração à economia (excedente do consumidor) e à biologia (circulação sanguínea, capacidade cardíaca). Outras são descritas nos exercícios.

Excedente do Consumidor

Lembre-se, a partir da Seção 4.7, que a função demanda $p(x)$ é o preço que uma companhia deve cobrar para conseguir vender x unidades de um produto. Geralmente, para vender maiores quantidades, é necessário baixar os preços; assim, a função demanda é uma função decrescente. O gráfico de uma típica função demanda, chamado **curva de demanda**, é mostrado na Figura 1. Se X é a quantidade disponível do produto, então $P = p(X)$ é o preço de venda corrente.

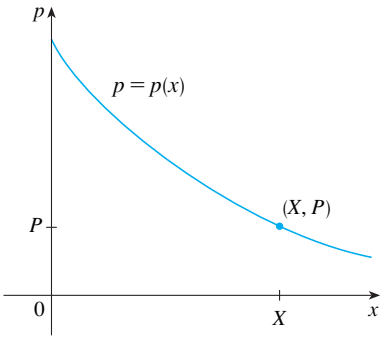


FIGURA 1
Curva típica de demanda

Dividimos o intervalo $[0, X]$ em n subintervalos, cada qual com o comprimento $\Delta x = X/n$, e tomamos $x_i^* = x_i$, a extremidade direita do i-ésimo subintervalo, como na Figura 2. Se, após as primeiras x_{i-1} unidades terem sido vendidas, um total de apenas x_i unidades estiver disponível e o preço unitário for marcado a $p(x_i)$ dólares, então as Δx unidades adicionais poderiam ter sido vendidas (mas não mais). Os consumidores que teriam pago $p(x_i)$ dólares colocaram um alto valor no produto; eles teriam pago o que vale para eles. Assim, pagando apenas P dólares, economizariam uma quantia de

$$\text{(economia por unidade)(número de unidades)} = [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

Considerando grupos semelhantes de possíveis consumidores para cada um dos subintervalos e adicionando as economias, temos o total de economia:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

(Essa soma corresponde à área dos retângulos na Figura 2.) Se tomarmos $n \to \infty$, essa soma de Riemann aproxima a integral

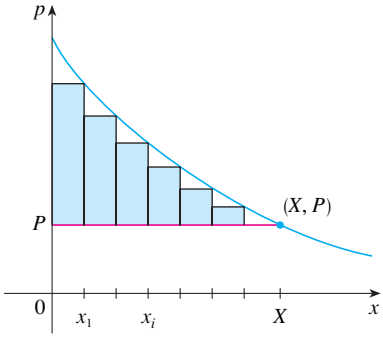


FIGURA 2

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

que os economistas chamam **excedente do consumidor** para o produto.

O excedente do consumidor representa a quantidade de dinheiro que os consumidores economizam ao comprar um produto pelo preço P, correspondente a uma quantidade demandada de X. A Figura 3 mostra a interpretação do excedente do consumidor como a área sob a curva de demanda e acima da reta $p = P$.

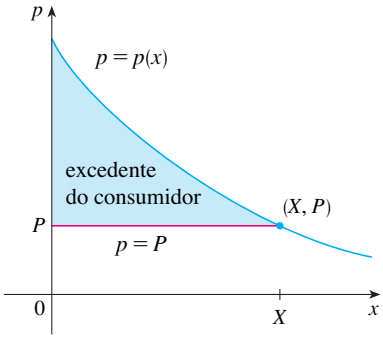


FIGURA 3

EXEMPLO 1 A demanda por um produto é

$$p = 1\,200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2$$

Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas for 500.

SOLUÇÃO Como o número de produtos vendidos é $X = 500$, o preço correspondente é

$$P = 1\,200 - (0{,}2)(500) - (0{,}0001)(500)^2 = 1\,075$$

Portanto, da Definição 1, o excedente do consumidor é

$$\begin{aligned}\int_0^{500} [p(x) - P]\,dx &= \int_0^{500} (1\,200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2 - 1\,075)\,dx \\ &= \int_0^{500} (125 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2)\,dx \\ &= 125x - 0{,}1x^2 - (0{,}0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500} \\ &= (125)(500) - (0{,}1)(500)^2 - \frac{(0{,}0001)(500)^3}{3} \\ &= \$33\,333{,}33\end{aligned}$$

Circulação Sanguínea

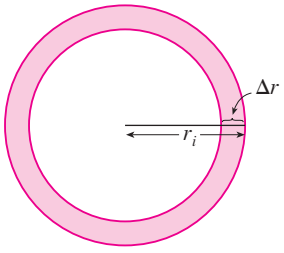


FIGURA 4

No Exemplo 7, na Seção 3.7, discutimos a lei do fluxo laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

que dá a velocidade v do sangue que circula em um vaso sanguíneo com raio R e comprimento l a uma distância r do eixo central, em que P é a diferença de pressão entre as extremidades do vaso sanguíneo e η, a viscosidade do sangue. Agora, para calcularmos a taxa da circulação sanguínea, ou *fluxo* (volume por unidade de tempo), consideramos raios menores igualmente espaçados $r_1, r_2, \ldots$. A área aproximada do anel com o raio interno r_{i-1} e o raio externo r_i é

$$2\pi r_i\,\Delta r \qquad \text{onde} \quad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

(Veja a Figura 4.) Se Δr é pequeno, então a velocidade é praticamente constante no anel e pode ser aproximada por $v(r_i)$. Assim, o volume de sangue por unidade de tempo que flui pelo anel é de aproximadamente

$$(2\pi r_i\,\Delta r)\,v(r_i) = 2\pi r_i\,v(r_i)\,\Delta r$$

e o volume total de sangue que flui por uma seção transversal por unidade de tempo é de aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\,v(r_i)\,\Delta r$$

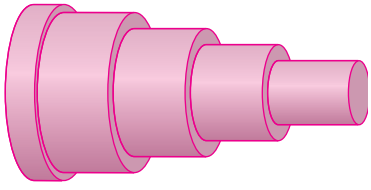


FIGURA 5

Essa aproximação está ilustrada na Figura 5. Observe que a velocidade (e portanto o volume por unidade de tempo) aumenta em direção ao centro do vaso sanguíneo. A aproximação torna-se melhor quando n aumenta. Quando tomamos o limite, obtemos o valor exato do **fluxo** (ou *descarga*), que é o volume de sangue que passa pela secção transversal por unidade de tempo:

$$\begin{aligned}F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\,v(r_i)\,\Delta r = \int_0^R 2\pi r\,v(r)\,dr \\ &= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,dr \\ &= \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}\end{aligned}$$

A equação resultante

$$F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l} \quad \boxed{2}$$

denominada **Lei de Poiseuille**, mostra que o fluxo é proporcional à quarta potência do raio do vaso sanguíneo.

Capacidade Cardíaca

A Figura 6 mostra o sistema cardiovascular humano. O sangue retorna do corpo pelas veias, entra no átrio direito do coração e é bombeado para os pulmões pelas artérias pulmonares para a oxigenação. Então volta para o átrio esquerdo por meio das veias pulmonares e daí circula para o resto do corpo pela aorta. A **capacidade cardíaca** é o volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo, isto é, a taxa de fluxo na aorta.

O *método da diluição do contraste* é usado para medir a capacidade cardíaca. O contraste (corante) é injetado no átrio direito e escoa pelo coração para a aorta. Uma sonda inserida na aorta mede a concentração do contraste saindo do coração a intervalos regulares de tempo durante um intervalo $[0, T]$ até que o contraste tenha terminado. Seja $c(t)$ a concentração do contraste no instante t. Se dividirmos $[0, T]$ em subintervalos de igual comprimento Δt, então a quantidade de contraste que circula pelo ponto de medição durante o subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ é aproximadamente

$$\text{(concentração)(volume)} = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

em que F é a taxa de fluxo que estamos tentando determinar. Assim, a quantidade total de contraste é de aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i) F\,\Delta t = F \sum_{i=1}^{n} c(t_i)\,\Delta t$$

e, fazendo $n \to \infty$, descobrimos que a quantidade de contraste é de

$$A = F \int_0^T c(t)\,dt$$

Então, a capacidade cardíaca é dada por

$$F = \frac{A}{\displaystyle\int_0^T c(t)\,dt} \quad \boxed{3}$$

onde a quantidade de contraste A é conhecida e a integral pode ser aproximada pelas leituras de concentração.

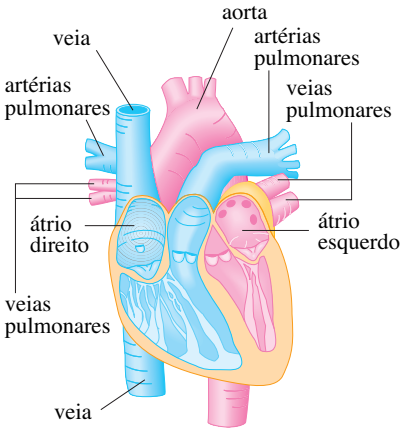


FIGURA 6

EXEMPLO 2 Uma quantidade de 5 mg de contraste é injetada no átrio direito. A concentração de contraste (em miligramas por litro) é medida na aorta a intervalos de 1 segundo, como mostrado na tabela. Estime a capacidade cardíaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6,1
1	0,4	7	4,0
2	2,8	8	2,3
3	6,5	9	1,1
4	9,8	10	0
5	8,9		

SOLUÇÃO Aqui $A = 5$, $\Delta t = 1$ e $T = 10$. Usamos a Regra de Simpson para aproximar a integral da concentração:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} c(t)\,dt &\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0{,}4) + 2(2{,}8) + 4(6{,}5) + 2(9{,}8) + 4(8{,}9) \\ &\quad + 2(6{,}1) + 4(4{,}0) + 2(2{,}3) + 4(1{,}1) + 0] \\ &\approx 41{,}87\end{aligned}$$

Então, a Fórmula 3 dá a capacidade cardíaca como

$$F = \frac{A}{\displaystyle\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41{,}87} \approx 0{,}12 \text{ L/s} = 7{,}2 \text{ L/min}$$

8.4 Exercícios

1. A função custo marginal $C'(x)$ foi definida como a derivada da função custo. (Veja as Seções 3.7 e 4.7.) Se o custo marginal para produzir x metros de um tecido é $C'(x) = 5 - 0{,}008x + 0{,}000009x^2$ (medido em dólares por metro) e o custo fixo é $C(0) = \$20\,000$, use o Teorema da Variação Total para achar o custo de produzir as primeiras 2 mil unidades.
2. Uma empresa estima que a receita marginal (em dólares por unidade) realizada pela venda de x unidades de um produto é $48 - 0{,}0012x$. Supondo que a estimativa seja precisa, encontre o aumento na receita se as vendas aumentaram de 5 000 para 10 000 unidades.
3. Uma mineradora estima que o custo marginal de extração de x toneladas de cobre de uma mina é $0{,}6 + 0{,}008x$, medido em milhares de dólares por tonelada. Os custos iniciais são \$100.000. Qual é o custo de extração das 50 primeiras toneladas de cobre? E para as próximas 50 toneladas?
4. A função demanda para um certo produto é $p = 20 - 0{,}05x$. Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas for 300. Ilustre desenhando a curva de oferta e identificando o excedente do produtor como uma área.
5. A curva de demanda é dada por $p = 450/(x + 8)$. Calcule o excedente do consumidor quando o preço de venda for \$ 10.
6. A **função oferta** $p_S(x)$ para um produto dá a relação entre o preço de venda e o número de unidades que os fabricantes produzirão naquele preço. Para um preço maior, os fabricantes produzirão mais unidades, portanto p_S é uma função crescente de x. Seja X a quantidade de mercadoria produzida atualmente e seja $P = p_S(X)$ o preço atual. Alguns fabricantes desejariam fazer e vender o produto a um preço mais baixo e, portanto, estão recebendo mais que seu preço mínimo. O excesso é chamado **excedente do produtor**. Um argumento semelhante ao do excedente do consumidor mostra que o excedente é dado pela integral

$$\int_0^X [P - p_S(x)]\,dx$$

Calcule o excedente do produtor para a função oferta $p_S(x) = 3 + 0{,}01x^2$ ao nível de vendas $X = 10$. Ilustre desenhando a curva de oferta e identificando o excedente do produtor como uma área.

7. Se a curva de oferta é representada pela equação $p = 200 + 0{,}2x^{3/2}$, calcule o excedente do produtor se o preço de venda for de \$ 400.
8. Para um dado produto, o número de unidades produzidas e o preço por unidade é determinado pelas coordenadas do ponto de intersecção das curvas de oferta e de demanda. Dadas as curvas de demanda $p = 50 - \frac{1}{20}x$ e oferta $p = 20 + \frac{1}{10}x$, calcule os excedentes do consumidor e do produtor. Ilustre esboçando o gráfico das curvas de oferta e de demanda e identificando as áreas dos excedentes.
9. Uma companhia modelou a curva de demanda para seu produto (em dólares) pela equação

$$p = \frac{800\,000e^{-x/5\,000}}{x + 20\,000}.$$

Use um gráfico para estimar o nível de vendas quando o preço de venda é \$16. Então calcule (aproximadamente) o excedente do consumidor para esse nível de venda.

10. Um cinema cobra \$10,00 por pessoa e está vendendo aproximadamente 500 ingressos em uma noite típica de semana. Depois de pesquisar seus clientes, o cinema estima que, para cada 50 centavos de desconto, o número de frequentadores aumenta 50 por noite. Calcule a função demanda e o excedente do consumidor quando as entradas são vendidas a \$ 8,00.
11. Se a quantidade de capital que uma companhia tem em um instante t é $f(t)$, então a derivada, $f'(t)$, é chamada *fluxo líquido de investimento*. Suponha que o fluxo líquido de investimento seja $\sqrt{t}$ milhões de dólares por ano (com t medido em anos). Calcule o aumento no capital (a *formação de capital*) do quarto ao oitavo anos.
12. Se a receita entra em uma companhia a uma taxa de $f(t) = 9\,000\sqrt{1 + 2t}$, em que t é medido em anos e $f(t)$ é medido em dólares por ano, encontre a receita total obtida nos primeiros quatro anos.
13. A *Lei da Renda de Pareto* afirma que o número de pessoas com renda entre $x = a$ e $x = b$ é $N = \int_a^b Ax^{-k}\,dx$, onde A e k são constantes, com $A > 0$ e $k > 1$. A renda média destas pessoas é

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}\,dx$$

Calcule $\bar{x}$.

14. Um verão quente e úmido está causando uma explosão da população de mosquitos em uma cidade turística. O número de mosquitos aumenta a uma taxa estimada de $2\,200 + 10e^{0{,}8t}$ por semana (com t medido em semanas). Em quanto aumenta a população de mosquitos entre a quinta e a nona semanas do verão?
15. Use a Lei de Poiseuille para calcular a vazão em uma pequena artéria humana, tomando $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm e $P = 4\,000$ dinas/cm^2.
16. A pressão alta resulta da constrição das artérias. Para manter uma taxa normal de circulação (fluxo), o coração tem de bombear mais forte, aumentando assim a pressão sanguínea. Use a Lei de Poiseuille para mostrar que se R_0 e P_0 são valores normais para o raio e a pressão em uma artéria, e R e P, os valores para a artéria constrita, então, para o fluxo permanecer constante, P e R estão relacionados pela equação

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

Deduza que se o raio de uma artéria é reduzido para três quartos de seu valor normal, então a pressão é mais que triplicada.

17. O método da diluição do contraste é usado para medir a capacidade cardíaca com 6 mg de contraste. As concentrações de contraste, em mg/L, são modeladas por $c(t) = 20te^{-0{,}6t}$, $0 \leq t \leq 10$, onde t é medido em segundos. Calcule a capacidade cardíaca.

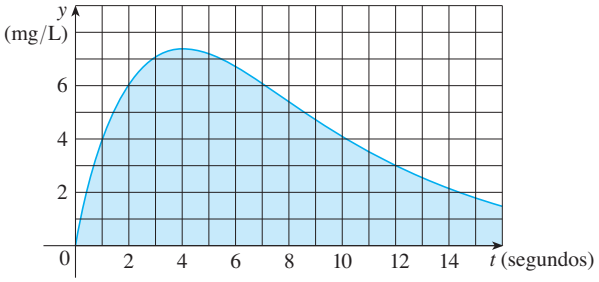
É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

18. Depois de uma injeção de 5,5 mg de contraste, as leituras de concentração do contraste, em mg/L, a intervalos de dois segundos, são mostradas na tabela. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0,0	10	4,3
2	4,1	12	2,5
4	8,9	14	1,2
6	8,5	16	0,2
8	6,7		

19. É mostrado o gráfico da concentração $c(t)$ depois da injeção de 7 mg de contraste em um coração. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.



8.5 Probabilidade

O cálculo tem um papel na análise de comportamento aleatório. Suponha que consideremos o nível de colesterol de uma pessoa escolhida aleatoriamente em um grupo de determinada idade, ou a altura de uma mulher adulta escolhida aleatoriamente, ou ainda a durabilidade de uma pilha de um certo tipo escolhida aleatoriamente. Essas quantidades são chamadas **variáveis aleatórias contínuas**, porque seus valores variam em um intervalo de números reais, embora possam ser medidos ou registrados apenas com o inteiro mais próximo. Poderíamos querer saber a probabilidade de o nível de colesterol do sangue ser maior que 250, ou a probabilidade de a altura de uma mulher adulta estar entre 60 e 70 polegadas, ou a probabilidade de uma pilha nova durar entre 100 e 200 horas. Se X representar a durabilidade daquele tipo de bateria, denotamos essa última probabilidade como segue:

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200)$$

De acordo com a interpretação de frequência da probabilidade, esse número é a proporção, a longo prazo, de todas as pilhas do tipo especificado com durabilidade entre 100 e 200 horas. Como isso representa uma proporção, a probabilidade naturalmente está entre 0 e 1.

Cada variável aleatória contínua X tem uma **função densidade de probabilidade** f. Isso significa que a probabilidade de X estar entre a e b é encontrada pela integração de f de a até b:

$$\boxed{1} \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por exemplo, a Figura 1 mostra o gráfico de um modelo da função densidade de probabilidade f para uma variável aleatória X definida como a altura em polegadas de uma mulher norte-americana adulta (de acordo com dados do National Health Survey). A probabilidade de a altura da mulher escolhida aleatoriamente estar entre 60 e 70 polegadas é igual à área sob o gráfico de f de 60 a 70.

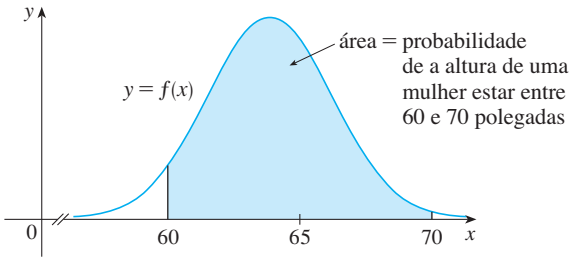


FIGURA 1
Função densidade de probabilidade para a altura de uma mulher adulta

Em geral, a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X satisfaz $f(x) \geqslant 0$ para todo x. Como as probabilidades são medidas em uma escala de 0 até 1, segue que

$$\boxed{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

EXEMPLO 1 Seja $f(x) = 0{,}006x(10 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x.
(a) Verifique que f é uma função densidade de probabilidade.
(b) Encontre $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

SOLUÇÃO
(a) Para $0 \leqslant x \leqslant 10$, temos $0{,}006x(10 - x) \geqslant 0$, logo, $f(x) \geqslant 0$ para todo x. Também precisamos verificar se a Equação 2 é satisfeita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} 0{,}006x(10 - x)\,dx = 0{,}006 \int_{0}^{10} (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0{,}006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = 0{,}006\left(500 - \tfrac{1.000}{3}\right) = 1$$

Portanto, f é uma função densidade de probabilidade.
(b) A probabilidade de que X esteja entre 4 e 8 é

$$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = \int_{4}^{8} f(x)\,dx = 0{,}006 \int_{4}^{8} (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0{,}006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^8 = 0{,}544$$

EXEMPLO 2 Fenômenos como tempo de espera ou tempo de falha de um equipamento são comumente modelados por funções densidade de probabilidade exponencialmente decrescentes. Encontre a forma exata de uma função desse tipo.

SOLUÇÃO Pense em uma variável aleatória como o tempo que você espera na linha antes de ser atendido por um funcionário da companhia para a qual você está ligando. Assim, em vez de x, use t para representar o tempo em minutos. Se f é a função densidade de probabilidade e você telefona no instante $t = 0$, então, pela Definição 1, $\int_0^2 f(t)\,dt$ representa a probabilidade de o funcionário responder dentro dos primeiros dois minutos, e $\int_4^5 f(t)\,dt$ é a probabilidade de sua chamada ser atendida no quinto minuto.

Está claro que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (o funcionário não pode atender antes de você fazer a ligação). Para $t > 0$ devemos usar uma função exponencial decrescente, isto é, uma função do tipo $f(t) = Ae^{-ct}$, onde A e c são constantes positivas. Logo,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Usamos a Equação 2 para determinar o valor de A:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} Ae^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} Ae^{-ct}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{A}{c} e^{-ct} \right]_0^x = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{c}(1 - e^{-cx})$$

$$= \frac{A}{c}$$

Portanto, $A/c = 1$ e, assim, $A = c$. Então, toda função densidade exponencial tem a forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Um gráfico típico é mostrado na Figura 2.

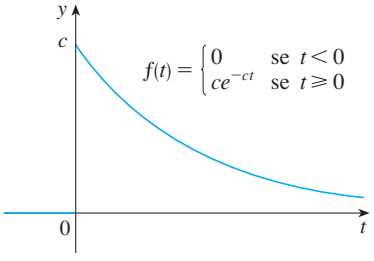


FIGURA 2
Função densidade exponencial

Valores Médios

Suponha que você esteja esperando que um funcionário da companhia para a qual você ligou atenda sua ligação e que esteja pensando quanto tempo, em média, terá de aguardar. Seja $f(t)$ a função densidade correspondente, na qual t é medido em minutos, e pense em uma amostra de N pessoas que ligaram para essa companhia. Provavelmente nenhuma das pessoas teve de esperar mais que uma hora; assim, vamos restringir nossa atenção ao intervalo $0 \leqslant t \leqslant 60$. Vamos dividir o intervalo em n intervalos de comprimento igual a Δt e extremidades $0, t_1, t_2, \ldots, t_n = 60$. (Pense em Δt com duração de um minuto, ou 30 segundos, ou 10 segundos, ou até mesmo 1 segundo.) A probabilidade de a ligação de alguém ser atendida durante o período de tempo entre t_{i-1} e t_i é a área sob a curva $y = f(t)$ de t_{i-1} a t_i, que é aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Essa é a área de um retângulo aproximante na Figura 3, onde $\bar{t}_i$ é o ponto médio do intervalo.)

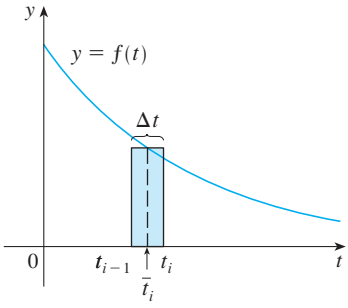


FIGURA 3

Como a proporção a longo prazo de chamadas que são respondidas em um período de tempo de t_{i-1} a t_i é $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, esperamos que, em nossa amostra de N pessoas que ligam, o número de chamadas respondidas nesse período de tempo seja aproximadamente $Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t$ e o tempo de cada espera seja cerca de $\bar{t}_i$. Portanto, o tempo total de espera é o produto desses números: aproximadamente $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Somando todos os intervalos, temos o tempo total aproximado de espera de todas as pessoas:

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Se agora dividirmos pelo número de pessoas que ligam N, obteremos o tempo *médio* de espera aproximado:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Denotamos a média pela letra grega μ (mu).

Reconhecemos isso como uma soma de Riemann para a função $t f(t)$. À medida que o intervalo diminui (isto é, $\Delta t \to 0$ e $n \to \infty$), essa soma de Riemann se aproxima da integral

$$\int_0^{60} t f(t)\,dt$$

Essa integral é chamada *tempo médio de espera*.

Em geral, a **média** de qualquer função densidade de probabilidade f é definida como

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

A média pode ser interpretada como o valor médio a longo prazo da variável aleatória X. Isso também pode ser interpretado como uma medida de centralidade da função densidade de probabilidade.

A expressão para a média parece uma integral que vimos anteriormente. Se $\mathcal{R}$ é a região que está sob o gráfico de f, sabemos a partir da Fórmula 8.3.8 que a coordenada x do centroide de $\mathcal{R}$ é

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \mu$$

por causa da Equação 2. Dessa forma, uma placa fina no formato de $\mathcal{R}$ se equilibra em um ponto sobre a reta vertical $x = \mu$. (Veja a Figura 4.)

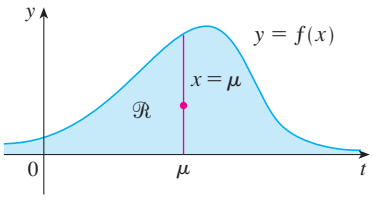


FIGURA 4
$\mathcal{R}$ se equilibra em um ponto da reta $x = \mu$

EXEMPLO 3 Calcule a média da distribuição exponencial do Exemplo 2:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO De acordo com a definição da média, temos

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} tce^{-ct}\, dt$$

Para calcularmos essa integral, usamos a integração por partes, com $u = t$ e $dv = ce^{-ct}\, dt$:

$$\int_0^{\infty} tce^{-ct}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x tce^{-ct}\, dt = \lim_{x\to\infty} \left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\, dt \right)$$

O limite do primeiro termo é 0 pela Regra de l'Hôspital.

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c} \right) = \frac{1}{c}$$

A média é $\mu = 1/c$ e, assim, podemos reescrever a função densidade de probabilidade como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 4 Suponha que o tempo médio de espera para um cliente ser atendido pelo funcionário da empresa para a qual ele está ligando seja 5 minutos.
(a) Calcule a probabilidade de a ligação ser atendida no primeiro minuto.
(b) Calcule a probabilidade de o consumidor esperar mais que 5 minutos para ser atendido.

SOLUÇÃO
(a) Foi-nos dado que a média da distribuição exponencial é $\mu = 5$ min e, assim, pelo resultado do Exemplo 3, sabemos que a função densidade de probabilidade é

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 0{,}2e^{-t/5} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Então a probabilidade de a ligação ser atendida no primeiro minuto é

$$\begin{aligned} P(0 \leqslant T \leqslant 1) &= \int_0^1 f(t)\, dt \\ &= \int_0^1 0{,}2e^{-t/5}\, dt = 0{,}2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1 \\ &= 1 - e^{-1/5} \approx 0{,}1813 \end{aligned}$$

Assim, cerca de 18% das ligações dos clientes são atendidas durante o primeiro minuto.
(b) A probabilidade de o consumidor esperar mais que 5 minutos é

$$\begin{aligned} P(T > 5) &= \int_5^{\infty} f(t)\, dt = \int_5^{\infty} 0{,}2e^{-t/5}\, dt \\ &= \lim_{x\to\infty} \int_5^x 0{,}2e^{-t/5}\, dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5}) \\ &= \frac{1}{e} \approx 0{,}368 \end{aligned}$$

Cerca de 37% dos consumidores esperam mais que 5 minutos antes de terem sua ligação atendida.

Observe o resultado do Exemplo 4(b): embora o tempo médio de espera seja 5 minutos, apenas 37% dos consumidores esperam mais que 5 minutos. A razão disso é que alguns clientes têm de esperar muito mais (talvez 10 ou 15 minutos), aumentando a média.

Outra medida de centralidade da função densidade de probabilidade é a *mediana*. Esse é um número m tal que metade das chamadas têm um tempo de espera menor que m, e as outras chamadas têm um tempo de espera maior que m. Em geral, a **mediana** de uma função densidade de probabilidade é o número m tal que

$$\int_m^{\infty} f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}$$

Isso significa que metade da área sob o gráfico de f está à direita de m. No Exercício 9 pedimos que você mostre que a mediana do tempo de espera para a companhia descrita no Exemplo 4 é de aproximadamente 3,5 minutos.

Distribuições Normais

Muitos fenômenos aleatórios importantes – tais como os resultados de testes de aptidão, alturas e pesos de indivíduos de uma população homogênea, a precipitação de chuva anual em uma dada localidade – são modelados por uma **distribuição normal**. Isso significa que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é um membro de uma família de funções

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad \boxed{3}$$

Você pode verificar que a média para essa função é μ. A constante positiva é chamada **desvio padrão**; ela mede quão dispersos os valores de X estão. Dos gráficos com formato de sino dos membros da família na Figura 5, vemos que para os pequenos valores de σ, os valores de X estão agrupados em torno da média, enquanto para valores maiores de σ, os valores de X estão mais distribuídos. Os estatísticos têm métodos para usar conjuntos de dados para estimar μ e σ.

O desvio padrão é simbolizado pela letra grega minúscula σ (sigma).

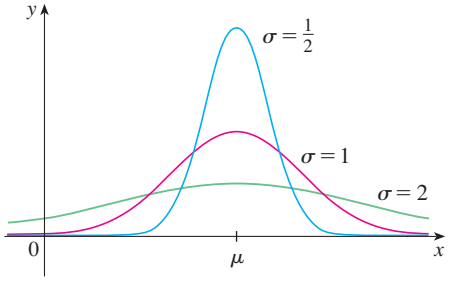


FIGURA 5
Distribuições normais

O fator $1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$ é necessário para fazer de f uma função densidade de probabilidade. De fato, isso pode ser verificado usando-se métodos de cálculo de várias variáveis, de forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx = 1$$

EXEMPLO 5 Os resultados do teste de Quociente de Inteligência (QI) têm distribuição normal com média 100 e desvio padrão 15. (A Figura 6 mostra a função densidade de probabilidade correspondente.)
(a) Qual a porcentagem da população com QI entre 85 e 115?
(b) Qual a porcentagem da população com QI acima de 140?

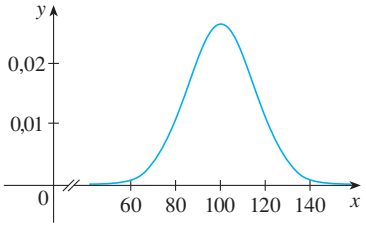


FIGURA 6
Distribuição de resultados de QI

SOLUÇÃO
(a) Como os resultados do QI têm uma distribuição normal, utilizamos a função densidade de probabilidade dada pela Equação 3 com $\mu = 100$ e $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\, dx$$

Lembre-se, a partir da Seção 7.5, de que a função $y = e^{-x^2}$ não tem primitiva elementar, de modo que não podemos calcular a integral exatamente. Mas podemos usar os recursos de integração numérica de uma calculadora ou de um computador (ou a Regra do Ponto Médio ou a Regra de Simpson) para estimar sua integral. Fazendo assim, descobrimos que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0{,}68$$

Assim, cerca de 68% da população tem QI entre 85 e 115, isto é, dentro de um desvio padrão da média.
(b) A probabilidade de o QI de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser maior que 140 é

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx$$

Para evitar a integral imprópria, podemos aproximá-la pela integral de 140 a 200. (É seguro dizer que é extremamente raro encontrar pessoas com QI acima de 200.) Então

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx \approx 0{,}0038$$

Portanto, cerca de 0,4% da população tem QI acima de 140.

8.5 Exercícios

1. Seja $f(x)$ a função densidade de probabilidade da durabilidade de um pneu de alta qualidade, com x medido em milhas. Explique o significado de cada integral.

(a) $\int_{30\,000}^{40\,000} f(x)\, dx$ (b) $\int_{25\,000}^{\infty} f(x)\, dx$

2. Seja $f(t)$ a função densidade de probabilidade para o tempo que você leva para ir à escola de manhã, com t medido em minutos. Expresse as seguintes probabilidades como integrais.

(a) A probabilidade de que você chegue à escola em menos de 15 minutos.
(b) A probabilidade de que você demore mais que meia hora para chegar à escola.

3. Seja $f(x) = 30x^2(1 - x)^2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $f(x) = 0$ para todos os outros valores de x.

(a) Verifique se f é uma função densidade de probabilidade.
(b) Encontre $P\left(X \leqslant \frac{1}{3}\right)$.

4. Seja $f(x) = xe^{-x}$ se $x \geqslant 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$.

(a) Verifique se f é uma função densidade de probabilidade.
(b) Encontre $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

5. Seja $f(x) = c/(1 + x^2)$.

(a) Para qual valor de c é f uma função densidade de probabilidade?
(b) Para este valor de c, encontre $P(-1 < X < 1)$.

6. Seja $f(x) = k(3x - x^2)$ se $0 \leqslant x \leqslant 3$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$ ou $x > 3$.

(a) Para qual valor de k a função f é uma função densidade de probabilidade?
(b) Para este valor de k, calcule $P(X > 1)$.
(c) Calcule a média.

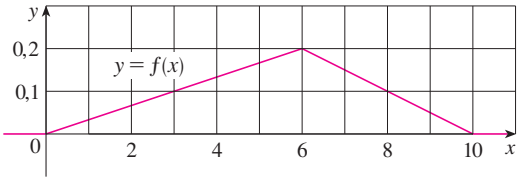
7. A roleta de um jogo de mesa indica aleatoriamente um número real entre 0 e 10. A roleta é honesta, no sentido de que indica um número em um dado intervalo com a mesma probabilidade que indica um número em qualquer outro intervalo de mesmo comprimento.

(a) Explique por que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

é uma função densidade de probabilidade para os valores desta roleta.
(b) O que sua intuição lhe diz sobre o valor da média? Verifique seu palpite calculando uma integral.

8. (a) Explique por que a função cujo gráfico é mostrado é uma função densidade de probabilidade.
(b) Use o gráfico para encontrar as seguintes probabilidades:
(i) $P(X < 3)$ (ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$
(c) Calcule a média.



9. Mostre que a mediana do tempo de espera para uma chamada para a companhia descrita no Exemplo 4 é de cerca de 3,5 minutos.

10. (a) O rótulo de um tipo de lâmpada indica que ela tem uma vida útil média de 1 000 horas. É razoável modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1\,000$. Use esse modelo para encontrar a probabilidade de uma lâmpada
(i) queimar durante as primeiras 200 horas,
(ii) funcionar por mais de 800 horas.
(b) Qual a mediana da durabilidade dessas lâmpadas?

11. A gerente de uma lanchonete determina que o tempo médio de espera de seus clientes para serem atendidos seja de 2,5 minutos.

(a) Calcule a probabilidade de um cliente ter de esperar mais de 4 minutos.
(b) Calcule a probabilidade de um cliente ser servido dentro dos primeiros 2 minutos.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(c) A gerente quer fazer uma propaganda dizendo que se o cliente não for atendido dentro de um certo número de minutos, ele receberá um hambúrguer de graça. Mas ela não quer dar hambúrgueres gratuitos para mais que 2% de seus clientes. O que deve dizer a propaganda?

12. De acordo com o National Health Survey, a altura de homens adultos nos Estados Unidos tem uma distribuição normal com média de 69 polegadas e desvio padrão de 2,8 polegadas.
(a) Qual a probabilidade de um homem adulto escolhido aleatoriamente ter entre 65 e 73 polegadas?
(b) Qual a porcentagem de homens adultos com mais de 6 pés?

13. O "Projeto Lixo", da Universidade do Arizona, relata que a quantidade de papel descartada pelas casas por semana tem uma distribuição normal com média de 4,3 kg e desvio padrão de 1,9 kg. Qual a porcentagem de casas que jogam fora pelo menos 5 kg de papel por semana?

14. Os rótulos das caixas afirmam que elas contêm 500 g de cereal. A máquina que enche as caixas produz pesos que têm distribuição normal com desvio padrão de 12 g.
(a) Se o peso-alvo é de 500 g, qual a probabilidade de a máquina produzir uma caixa com menos de 480 g de cereal?
(b) Suponha que uma lei estabeleça que não pode haver mais que 5% de caixas de cereal manufaturadas com menos de 500 g. A que peso-alvo deve o fabricante aferir suas máquinas?

15. As velocidades dos veículos em uma autoestrada com limite de velocidade de 100 km/h são normalmente distribuídas com média 112 km/h e desvio padrão 8 km/h.
(a) Qual a probabilidade de que um veículo escolhido aleatoriamente esteja viajando dentro do limite de velocidade?
(b) Se a polícia for instruída a multar motoristas viajando a 125 km/h ou mais, qual percentual de motoristas poderá ser multado?

16. Mostre que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com a distribuição normal tem pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$.

17. Para qualquer distribuição normal, calcule a probabilidade de uma variável aleatória estar dentro de dois desvios padrão da média.

18. O desvio padrão para uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f e média μ é definido como

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx \right]^{1/2}$$

Calcule o desvio padrão para uma função densidade exponencial com média μ.

19. O átomo de hidrogênio é composto por um próton no núcleo e um elétron, que se move ao redor do núcleo. Na teoria quântica de estrutura atômica supõe-se que o elétron não se mova em uma órbita bem definida. Ao contrário, ele ocupa um estado conhecido como *orbital*, que pode ser pensado como uma "nuvem" de carga negativa rodeando o núcleo. No estado de energia mais baixa, chamado *estado fundamental*, ou *orbital 1s*, é suposto que o formato do orbital seja uma esfera com centro no núcleo. Essa esfera é descrita em termos da função densidade de probabilidade

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3}\, r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0$$

onde a_0 é o *raio de Bohr* ($a_0 \approx 5{,}59 \times 10^{-11}$ m). A integral

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3}\, s^2 e^{-2s/a_0}\, ds$$

dá a probabilidade de o elétron ser encontrado dentro da esfera de raio r metros centrada no núcleo.
(a) Verifique se $p(r)$ é uma função densidade de probabilidade.
(b) Encontre $\lim_{r \to \infty} p(r)$. Para que valor de r a função $p(r)$ tem seu valor máximo?
(c) Desenhe a função densidade.
(d) Calcule a probabilidade de o elétron estar dentro da esfera de raio $4a_0$ centrada no núcleo.
(e) Calcule a distância média do elétron e do núcleo no estado fundamental do átomo de hidrogênio.

8 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Como o comprimento de uma curva é definido?
(b) Escreva uma expressão para o comprimento de uma curva lisa dada por $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$.
(c) O que acontece se x for dado como uma função de y?

2. (a) Escreva uma expressão para a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x.
(b) O que acontece se x for dado como uma função de y?
(c) O que acontece se a curva for girada em torno do eixo y?

3. Descreva como podemos calcular a força hidrostática contra uma parede vertical submersa em um fluido.

4. (a) Qual é o significado físico do centro de massa de uma placa fina?
(b) Se a placa está entre $y = f(x)$ e $y = 0$, onde $a \leqslant x \leqslant b$, escreva expressões para as coordenadas do centro de massa.

5. O que diz o Teorema de Pappus?

6. Dada uma função demanda $p(x)$, explique o significado do excedente do consumidor quando a quantidade de produto disponível é X e o preço de venda é P. Ilustre com um esboço.

7. (a) O que é capacidade cardíaca?
(b) Explique como a capacidade cardíaca pode ser medida pelo método de diluição do contraste.

8. O que é função densidade de probabilidade? Quais as propriedades dessa função?

9. Suponha que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade para as massas de universitárias, onde x é medido em quilogramas.
(a) Qual o significado da integral $\int_0^{60} f(x)\, dx$?
(b) Escreva uma expressão para a média dessa função densidade.
(c) Como podemos calcular a mediana dessa função densidade?

10. O que é uma distribuição normal? Qual é o significado do desvio padrão?

Exercícios

1–2 Calcule o comprimento da curva.

1. $y = \frac{1}{6}(x^2 + 4)^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

2. $y = 2 \ln(\operatorname{sen} \frac{1}{2}x), \quad \pi/3 \leqslant x \leqslant \pi$

3. (a) Calcule o comprimento da curva

$$y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2} \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

(b) Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva descrita em (a) em torno do eixo y.

4. (a) A curva $y = x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1$, é girada em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

(b) Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada em (a) em torno do eixo x.

5. Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento da curva $y = \operatorname{sen} x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

6. Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar a área da superfície obtida pela rotação da curva dada no Exercício 5 em torno do eixo x.

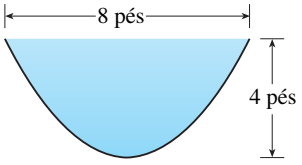
7. Encontre o comprimento da curva

$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\, dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 16$$

8. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva do Exercício 7 em torno do eixo y.

9. Um portão em um canal de irrigação é construído no formato de um trapézio com 1 m de largura na base, 2 m de largura no topo e 1 m de altura. Ele é colocado verticalmente no canal, com água até seu topo. Calcule a força hidrostática em um dos lados do portão.

10. Um canal é preenchido com água e suas extremidades verticais têm o formato da região parabólica da figura. Calcule a força hidrostática em uma extremidade do canal.



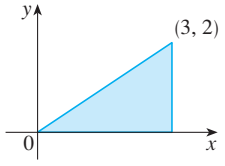
11–12 Calcule o centroide da região delimitada pelas curvas dadas.

11. $y = \frac{1}{2}x, \quad y = \sqrt{x}$

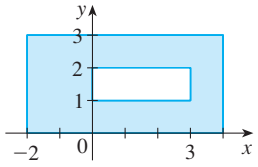
12. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4, \quad x = 3\pi/4$

13–14 Calcule o centroide da região mostrada

13.



14.



15. Calcule o volume obtido quando o círculo de raio 1 com centro $(1, 0)$ é girado em torno do eixo y.

16. Use o Teorema de Pappus e o fato de que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$ para calcular o centroide da região semicircular delimitada pela curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x.

17. A função demanda para um produto é dada por

$$p = 2\,000 - 0{,}1x - 0{,}01x^2$$

Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas for 100.

18. Depois de uma injeção de 6 mg de contraste no coração, as leituras da concentração de contraste a intervalos de 2 segundos são mostradas na tabela. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	14	4,7
2	1,9	16	3,3
4	3,3	18	2,1
6	5,1	20	1,1
8	7,6	22	0,5
10	7,1	24	0
12	5,8		

19. (a) Explique por que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{20} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

é uma função densidade de probabilidade.

(b) Encontre $P(X < 4)$.

(c) Calcule a média. É esse o valor que você esperaria?

20. A duração da gestação humana tem uma distribuição normal com média de 268 dias e desvio padrão de 15 dias. Qual a porcentagem de gestações que duram entre 250 e 280 dias?

21. O tempo de espera na fila de um certo banco é modelado por uma função densidade exponencial com média de 8 minutos.

(a) Qual a probabilidade de o cliente ser atendido nos primeiros 3 minutos?

(b) Qual a probabilidade de o cliente ter de esperar mais de 10 minutos?

(c) Qual é a mediana do tempo de espera?

Problemas Quentes

1. Calcule a área da região $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \leqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant 4y\}$.

2. Calcule o centroide da região delimitada pelo laço da curva $y^2 = x^3 - x^4$.

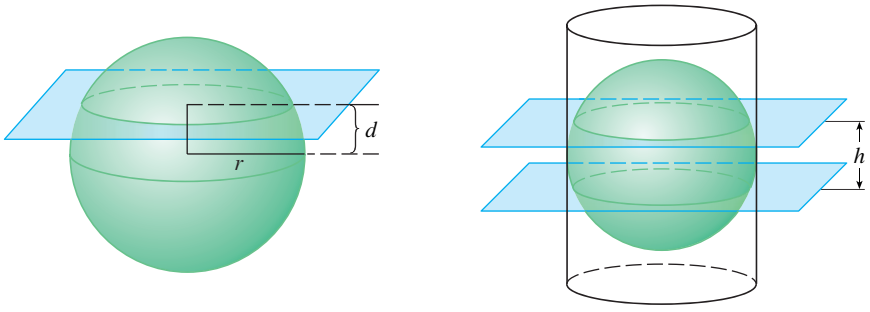
3. Se uma esfera de raio r é fatiada por um plano cuja distância ao centro da esfera é d, então a esfera é dividida em dois pedaços, chamados segmentos de mesma base. As superfícies correspondentes são denominadas *zonas esféricas de mesma base*.

(a) Determine as áreas das superfícies das duas zonas esféricas indicadas na figura.

(b) Determine a área aproximada do oceano Ártico, supondo que ele tenha formato aproximadamente circular, com o centro no polo norte e "circunferência" a 75° graus de latitude norte. Use $r = 6\,370$ km para o raio da Terra.

(c) Uma esfera de raio r está inscrita em um cilindro circular reto de raio r. Dois planos perpendiculares ao eixo central do cilindro e separados a uma distância h cortam uma *zona esférica de duas bases* na esfera. Mostre que a área da superfície da zona esférica se iguala à área da superfície da região que os dois planos cortam fora do cilindro.

(d) A *Zona Tórrida* é uma região na superfície da Terra que está entre o Trópico de Câncer (23,45° graus de latitude norte) e o Trópico de Capricórnio (23,45° graus de latitude sul). Qual é a área da Zona Tórrida?



4. (a) Mostre que um observador a uma altura H acima do polo norte de uma esfera de raio r pode ver uma parte da esfera que tem área

$$\frac{2\pi r^2 H}{r + H}$$

(b) Duas esferas com raios r e R estão colocadas de modo que a distância entre seus centros é d, onde $d > r + R$. Onde deve ser colocada uma luz na reta que liga os centros de modo a iluminar a maior área total de superfície?

5. Suponha que a densidade da água do mar, $\rho = \rho(z)$, varie com a profundidade z abaixo da superfície.

(a) Mostre que a pressão hidrostática é regida pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$$

onde g é a aceleração da gravidade. Sejam P_0 e ρ_0 a pressão e a densidade em $z = 0$. Expresse a pressão a uma profundidade z como uma integral.

(b) Suponha que a densidade da água do mar a uma profundidade z seja dada por $\rho = \rho_0 e^{z/H}$, em que H é uma constante positiva. Calcule a força total, expressa como uma integral, exercida sobre uma janela vertical circular de raio r cujo centro está a uma distância $L > r$ abaixo da superfície.

6. A figura mostra um semicírculo com raio 1, diâmetro horizontal PQ e as retas tangentes em P e Q. Em qual altura acima do diâmetro a linha horizontal deve ser posicionada para minimizar a área sombreada?

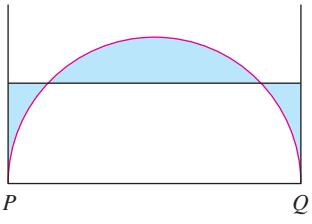
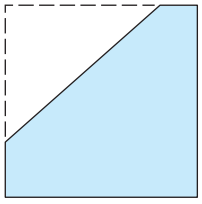


FIGURA PARA O PROBLEMA 6

7. Seja P uma pirâmide de base quadrada de lado $2b$ e suponha que S seja uma esfera com centro na base de P e S é tangente a todas as oito arestas de P. Encontre a altura de P. Em seguida, encontre o volume da intersecção de S e P.

8. Considere uma placa metálica plana colocada verticalmente sob a água com seu topo 2 m abaixo da superfície da água. Determine um formato para a placa de maneira que, se ela for dividida em qualquer número de faixas horizontais de mesma altura, a força hidrostática em cada faixa seja a mesma.
9. Um disco uniforme de raio 1 deve ser cortado por uma reta de modo que o centro de massa do menor pedaço se encontre na metade do caminho ao longo de um raio. Quão próximo do centro do disco deve ser efetuado o corte? (Expresse sua resposta com precisão de duas casas decimais.)
10. Um triângulo com área 30 cm^2 é retirado do canto de um quadrado de lado 10 cm, como mostrado na figura. Se o centroide da região restante está a 4 cm do lado direito do quadrado, quão longe ele está da base do quadrado?



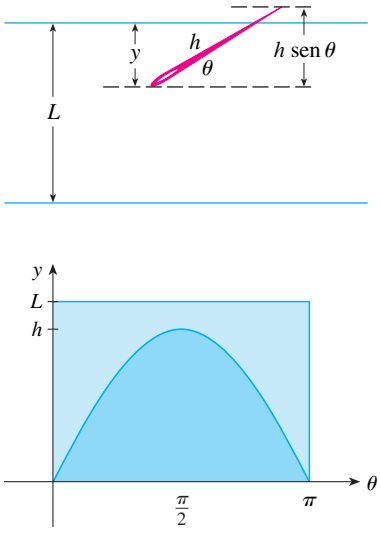


FIGURA PARA O PROBLEMA 11

11. Em um famoso problema do século XVIII, conhecido como o *problema da agulha de Buffon*, uma agulha de comprimento h é derrubada em uma superfície plana (por exemplo, uma mesa) na qual retas paralelas separadas por L unidades $L \geqslant h$ foram desenhadas. O problema é determinar a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas. Suponha que as retas estejam na direção leste para oeste, paralelas ao eixo x em um sistema de coordenadas cartesianas (como na figura). Seja y a distância da ponta "sul" da agulha até a reta mais próxima ao norte. (Se a ponta "sul" da agulha está na reta, considere $y = 0$. Se a agulha estiver na direção leste-oeste, considere a ponta "oeste" como a ponta "sul".) Seja θ o ângulo que a agulha faz com um raio se estendendo na direção leste da ponta "sul". Então $0 \leqslant y \leqslant L$ e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Observe que a agulha intercepta uma das retas apenas quando $y < h \operatorname{sen} \theta$. Agora, o conjunto de todas as possibilidades para a agulha pode ser identificado com a região retangular $0 \leqslant y \leqslant L, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, e a proporção de vezes que a agulha intercepta uma reta é a razão

$$\frac{\text{área sob } y = h \operatorname{sen} \theta}{\text{área do retângulo}}$$

Essa razão é a probabilidade de a agulha interceptar uma reta. Calcule a probabilidade de a agulha interceptar uma reta se $h = L$. E se $h = \frac{1}{2}L$?

12. Se a agulha do Problema 11 tiver o comprimento $h > L$, é possível que a agulha intercepte mais de uma reta.
    (a) Se $L = 4$, calcule a probabilidade de a agulha de comprimento 7 interceptar pelo menos uma reta. [*Dica:* proceda como no Problema 11. Defina y como anteriormente; então o conjunto total de possibilidades para a agulha pode ser identificado com a mesma região retangular $0 \leqslant y \leqslant L, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Qual porção do retângulo corresponde à agulha interceptando uma reta?]
    (b) Se $L = 4$, calcule a probabilidade de a agulha de comprimento 7 interceptar *duas* retas.
    (c) Se $2L < h \leqslant 3L$, encontre uma fórmula geral para a probabilidade de a agulha interceptar três retas.
13. Calcule o centroide da região limitada pela elipse $x^2 + (x + y + 1)^2 = 1$.